வெக்டர் கணிதமும் அதன் பயன்பாடுகளும்

(பட்டப்படிப்பிற்குரிய சிறப்புப்பாடம்)

பிற்சேர்க்கை

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்
திரு. ரா. மகாதேவன்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

வெக்டர் கணிதமும் அதன் பயன்பாடுகளும்

(பட்டப்படிப்பிற்குரிய சிறப்புப்பாடம்)

பிற்சேர்க்கை

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்

திரு. ரா. மகாதேவன்,

கணிதப் பேராசிரியர்,

மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

Supplement—January, 1973

VECTOR ALGEBRA (Major)
(Supplement)

R. MAHADEVAN

PRICE Rs. 2-15
(or supplied free of cost when original book is purchased)

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by

Srinivasam Press of Jupiter Enterprises,
1, Smith Lane, Mount Road,
Madras-2.

முன்னுரை

இயக்கவியல், நிலையியல் போன்ற ஆராய்ச்சிகளில் வரும் திசை வேகம், முடுக்கம், விசை, உந்தம் இவை போன்றவை திசையையும் அளவையும் ஒருங்கே கொண்டவை எனவும், அவ்விரு பண்புகளும் சேர்ந்து தரப்பட்டால் திட்டமாகக் கூறப்படும் எனவும் அறிவோம்.

அளவால் மட்டுமே திட்டமாகக் கூறப்படும் திணிவு, வெப்பநிலை, காலம் இவற்றைத் திசையிலி எண்களால் (Scalar numbers) கூறுவது போன்று, திசையையும் அளவையும் ஒருங்கே கொண்டவைகளை வெக்டர் எண்களால் கூறுகிறோம். வெக்டர் எண்களின் குறியீடு, அவற்றின் கூடுதல் விதி, பெருக்கற் பலன்கள் இவற்றை 'வெக்டர் கணிதமும் அதன் பயன்பாடுகளும்' எனும் நூலில் (க.நூ.வெ.இ. வரிசை எண் 233) விவரிக்கப்பட்டுள்ளது. திசையிலி எண்களில் நுண்ணிய மாறுதல் ஏற்பட, நிகழும் விளைவுகளைச் சாதாரண நுண்கணிதம் விவரிப்பது போன்று, வெக்டர் எண்களில் நுண்ணிய மாறுதல் ஏற்படும்போதுள்ள விளைவுகளை வெக்டர் நுண்கணிதம் கூறுகிறது. இஃது எவ்வாறு என்பதை இச் சிறு நூலில் விவரிப்போம்.

ரா. மகாதேவன்

பொருளடக்கம்

1. ஒரு திசையிலியின் சார்பலனுன வெக்டர்களின் வகைக்கெழு

(Derivatives of Vector functions of one Scalar Variable)

1.1 வெக்டர் சார்பலன்: ஒரு திசையிலியின் சார்பலனுன வெக்டர்களைப் பற்றிக் கூறுவோம். எடுத்துக் காட்டாக இயக்கவியலில், இயங்கும் துகளின் நிலையை **r** எனும் வெக்டரால் குறிப்போம். இது காலத்தின் சார்பலனுகும். $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ என்று எழுதலாம். 't'ன் ஒரு மதிப்புக்கு **r**-க்கு ஐயம் திரிபற ஒரே மதிப்புள்ளது. ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் துகள் இரண்டு இடங்களில் இருக்க முடியாது. **r** என்பது 't' எனும் திசையிலியின் ஒரே மதிப்புடைச் சார்பலன் (Single Valued Function) ஆகும்.

ஒரு வரையில் A என்பது ஒரு புள்ளியாகுக. P எனும் மற்றொரு புள்ளியின் நிலை வெக்டர் **u** ஆகுக. A-லிருந்து P-க்கு வரையின் வழியாக உள்ள தூரம் (arcual distance) s ஆகுக. அதாவது வரையில் AP-ன் நீளம் 's' என்ருல், **u** எனும் வெக்டர் 's'-ன் சார் பலனுகும். இங்கு 's' திசையிலி எண். ஆனுல் **u** என்பது வெக்டர். **u** எனும் வெக்டர், 's' எனும் ஒரு திசையிலியின் சார் பலனுகும். இவ்வாறு ஒரு திசையிலியின் சார் பலனுக வெக்டர் வருவதைப் பல இடங்களில் காணலாம். பொதுவாக $a \leq t \leq b$ எனும் இடைவெளியில் 't' எனும் திசையிலியின் சார்பலன் வெக்டர் **u** எனக் கொள்வோம்.

1.2 வெக்டரின் திசையிலியைச் சார்ந்த வகைக் கெழு (Derivative of a Vector w. r. t. a Scalar)

வெக்டர் சார் பலன் $\mathbf{u}(t)$;

$t = t_o$ எனும் போது அதன் மதிப்பு $\mathbf{u}(t_o)$.

$\underset{t \to t_o}{Lt}\, \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_o)$ என்றால் சார்பலன் $t=t_o$ எனும் இடத்தில் தொடர்ச்சி (Continuous) உள்ளது எனக் கூறப்படும். 't'-ல் ஏற்படும் நுண்ணிய மாறுதல் Δt என்போம்.

$\mathbf{u}(t)$-ன் வகைக்கெழு $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$ ஆனால்,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\mathbf{u}(t+\Delta t) - \mathbf{u}(t)}{\Delta t}$$ என்பதாகும்.

இதை $\mathbf{u}'(t)$ எனவும் குறிப்பது வழக்கம்.

['t'-ல் Δt எனும் மாறுதல் ஏற்படும் போது, வெக்டரில் ஏற்படும் மாறுதல் $\mathbf{u}(t \Delta t) - \mathbf{u}(t)$ ஆகும். இவ்விரண்டிற்கும் உள்ள விகிதம் $\dfrac{\mathbf{u}(t+\Delta t) - \mathbf{u}(t)}{\Delta t}$; $\Delta t \to 0$, ஆகும் போது, மேற் கூறிய விகிதத்தின் எல்லை $u'(t)$ ஆகும். இங்குச் சாதாரண நுண் கணிதத்தில் வருவது போன்றே, அதாவது திசையிலி மாறியின் வகைக்கெழுவை எவ்வாறு வரையறுத்தோமோ அது போன்று, வெக்டர் மாறியின் வகைக் கெழுவின் வரையறையும் கூறப்படுகிறது.]

$t = t_o$ எனுமிடத்து $\mathbf{u}(t)$-ன் வகைக் கெழு $u'(t)$ ஆக அமைந்தால், $\mathbf{u}(t)$ எனும் சார்பலன் $t = t_o$ எனுமிடத்து வகைக் கெழுவுடையது (differentiable) எனப்படும்.

அவ்வாறானால்

$$\frac{\mathbf{u}(t_o+\Delta t) - \mathbf{u}(t_o)}{\Delta t} = u'(t_o) + \varepsilon$$

இங்கு $\Delta t \to 0$ ஆகும் போது $t \to 0$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \mathbf{u}\,(t_o + \Delta t) = \mathbf{u}\,(t_o) + \{\mathbf{u}'\,(t_o) + \varepsilon\}\,\Delta t$$

$\Delta t \to 0$ என்றால் $\mathbf{u}\,(t_o + \Delta t) \to \mathbf{u}\,(t_o)$

அதாவது $\mathbf{u}\,(t)$ **எனும் சார் பலன்** $t = 0$ **எனுமிடத்து வகைக் கெழுவுடையதாயின், அது அங்குத் தொடர்ச்சியுடை சார்பலனுமாகும்** எனக் காண்கிறோம்,

அடுத்தடுத்து வகைக் கெழு காண, இரண்டாம் படி வகைக் கெழு என்பது முதற்படி வகைக் கெழுவின், வகைக் கெழு வாகும். இதன் குறியீடு $\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}$ அல்லது $u''\,(t)$

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = u''\,(t) = \frac{d\mathbf{u}'}{dt}.$$

$$\frac{d^3\mathbf{u}}{dt^3} = u'''\,(t) = \frac{d\mathbf{u}''}{dt}$$ இது போன்று மற்றவைகளும்.

குறிப்பு : சாதாரண நுண் கணிதத்தில்

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$ என்பது போன்று இங்கும்

$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$ எனக் கூறலாம். இங்கு $\mathbf{u}$ என்பது s–ன் சார் பலன்; s எனும் திசையிலி 't' எனும் திசையிலியின் சார் பலன்; ஆகவே $\frac{d\mathbf{u}}{ds}$ எனும் வெக்டரின் திசையிலிக் குணகம் $\frac{ds}{dt}$ ஆகும்.

1.3 கூடுதல், பெருக்கற் பலன்: இவற்றின் வகைக் கெழுக்கள் (Derivatives of sums and products)

$\mathbf{u}\,(t)$, $\mathbf{v}\,(t)$ என்பவை வகைக் கெழுவுடைய வெக்டர் சார் பலன்களானால், $f\,(t)$ என்பது திசையிலிச் சார் பலன் ஆனால், கீழ் வருவனவற்றை நிறுவ முடியும்.

(1) $\frac{d\mathbf{c}}{dt} = 0$ ($\mathbf{c}$ என்பது மாறு வெக்டர்)

(2) $\frac{d}{dt}\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}$

$$(3)\quad \frac{d}{dt}(f\mathbf{u}) = f\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{df}{dt}\mathbf{u}$$

$$(4)\quad \frac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\mathbf{v}$$

$$(5)\quad \frac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{u}}{dt}\times\mathbf{v}$$

இவற்றின் நிரூபணங்கள் திசையிலிச் சார் பலன்களின் வகைக் கெழு காணும் முறையை ஒட்டியதேயாகும்.

c என்பது மாரு வெக்டரானுல் 't'-ல் ஏற்படும் மாறுதலினுல் **c**-ல் மாறுதல் ஏற்படாது.

$$\therefore\ \Delta\mathbf{c} = 0 \qquad \therefore\ \frac{d\mathbf{c}}{dt} = 0$$

u (t), **v** (t) என்பவை இரு வெக்டர் சார்பலன்கள் 't'-ல் ஏற்படும் நுண்ணிய மாறுதல் Δt ஆகுக. அப்போது **u**, **v**-ல் ஏற்படும் மாறுதல்கள் முறையே $\Delta\mathbf{u}$, $\Delta\mathbf{v}$ ஆகுக.

$\therefore$ **u** + **v**-ல் ஏற்படும் மாறுதலை $\Delta(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ என்று குறித்தால்,

$$\Delta(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \Delta\mathbf{u} + \Delta\mathbf{v}$$

$$\therefore\ \frac{\Delta(\mathbf{u}+\mathbf{v})}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{u}}{\Delta t} + \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$$

இருபுறமும் $\Delta t\to 0$ ஆகும் போதுள்ள எல்லை மதிப்புகளைக் கொள்ள

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

எனக் காண்கிறோம்.

பெருக்கற் பலன்களின் பரவு விதியை (distribution law) அடிப்படையாகக்கொண்டு மற்ற சூத்திரங்கள் நிறுவப்படுகின்றன.

(3) $$\frac{d}{dt}(f\,\mathbf{u}) = \underset{\Delta t\to 0}{Lt}\ \frac{(f+\Delta f)(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u})-f\mathbf{u}}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t\to 0}{Lt}\ \frac{(f\mathbf{u}+f\Delta\mathbf{u}+\Delta f\mathbf{u}+\Delta f\Delta\mathbf{u}-f\mathbf{u}}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t\to 0}{Lt}\left(\frac{f\Delta\mathbf{u}}{\Delta t}+\frac{\Delta f}{\Delta t}\mathbf{u}+\frac{\Delta}{\Delta t}\Delta\mathbf{u}\right)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(f\,\mathbf{u}) = f\frac{d\mathbf{u}}{dt}+\frac{df}{dt}\mathbf{u}$$

(4) $$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \underset{\Delta t\to 0}{Lt}\ \frac{(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u})\cdot(\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v})-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t\to 0}{Lt}\ \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{v}+\Delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\Delta\mathbf{u}\Delta\mathbf{v}-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t\to 0}{Lt}\ \frac{\mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}+\frac{\Delta\mathbf{u}}{\Delta t}\cdot\mathbf{v}+\frac{\Delta\mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$$

$$= \mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\mathbf{v}$$

(5) மேற்கூறியதில் . க்குப் பதிலாக $\times$ என இட்டால்

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{d\mathbf{u}}{dt}\times\mathbf{v}$$

என வரும். பெருக்கற் பலன்களில் காரணிகளின் வரிசை அமைப்பை மாற்றக்கூடாது.

பயிற்சி 1

1. $\mathbf{u} = e^{-t}\,\mathbf{i} + \log(t^2+1)\,\mathbf{j} - \tan t\,\mathbf{k}$ என்றால்

$$\text{(i)}\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad \text{(ii)}\ \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \quad \text{(iii)}\ \left|\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right| \quad \text{(iv)}\ \left|\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\right|$$

என்பனவற்றின் மதிப்பை $t = 0$ எனும் இடத்துக் காண்க [i, j, k என்பவை அலகு வெக்டர்கள்.]

[விடை: (i) $-\mathbf{i} - \mathbf{k}$ (ii) $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

(iii) $\sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{5}$

2. $\mathbf{a} = t^2\,\mathbf{i} - t\,\mathbf{j} + (2t+1)\,\mathbf{k}$

$\mathbf{b} = (2t-3)\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - t\,\mathbf{k}$ என்றால்

$$\text{(i)}\ \frac{d}{dt}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \quad \text{(ii)}\ \frac{d}{dt}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \quad \text{(iii)}\ \frac{d}{dt}\left|\mathbf{a}+\mathbf{b}\right|$$

(iv) $\dfrac{d}{dt}\left(\mathbf{a} \times \dfrac{d\mathbf{b}}{dt}\right)$ இவற்றின் மதிப்புகளை $t = 1$ எனும்போது காண்க.

[விடை: (i) -6 (ii) $7\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ (iii) 1

(iv) $\mathbf{i}+6\mathbf{j}+2\mathbf{k}$]

3. $\mathbf{a} = 5t^2\mathbf{i}+t\mathbf{j}-t^3\mathbf{k}$ $\quad \mathbf{b} = \sin t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j}$
என்றால் (i) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ (ii) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ (iii) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})$
இவற்றின் மதிப்புகளை இரண்டு வழிகளில் காணவும்.

4. $\dfrac{d}{ds}\left(\mathbf{A}\cdot\dfrac{dB^2}{ds} - \dfrac{d\mathbf{A}}{ds}\cdot B\right)$-ன் மதிப்புக் காணவும்.

5. $\dfrac{d}{du}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\times\mathbf{r}) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\times\dfrac{d\mathbf{r}}{du} + \mathbf{p}\cdot\dfrac{dq}{du} + \mathbf{r} + \dfrac{d\mathbf{r}}{du}\cdot\mathbf{q}\times\mathbf{r}$

என நிறுவுக.

6. சுருக்குக : $\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}\cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\frac{d^2v}{dt^2}\right)$

7. $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}+2\frac{d\mathbf{r}}{dt}+5\mathbf{r}=0$ எனும் வகைக் கெழுச் சமன் பாட்டின் ஒரு தீர்வு

$$\mathbf{r}=e^{-t}\{\mathbf{c}_1\cos 2t+\mathbf{c}_2\sin 2t\}$$

என நிறுவுக. ($\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ மாறு வெக்டர்கள்)

8. $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt}+2\alpha\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\beta^2\mathbf{r}=0$ எனும் வகைக் கெழுச் சமன் பாட்டின் தீர்வு, $\mathbf{c}_1$ $\mathbf{c}_2$ என்பவை மாறு வெக்டர்களாகவும்.

(i) $\alpha^2-\beta^2>0$ ஆனால் $\mathbf{r}=e^{-\alpha t}\left[c_1 e^{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}+c_2 e^{-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\right.$

(ii) $\alpha^2-\beta^2<0$ ஆனால் $\mathbf{r}=e^{-\alpha t}[\mathbf{c}_1\cos\sqrt{\beta^2-\alpha^2 t}$

$$+\mathbf{c}_2\sin[\sqrt{\beta^2}-\alpha^2 t]$$

(iii) $\alpha^2-\beta^2=0$ ஆனால் $\mathbf{r}=(\mathbf{c}_1\times\mathbf{c}_2 t)^{e^{-\alpha t}}$ எனக் காண்க.

9. மேற்கூறிய கணக்கைப் பயன்படுத்திக் கீழ்வரும் வகைக் கெழு சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க:

(i) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}-4\frac{d\mathbf{r}}{dt}-5\mathbf{r}=0$

(ii) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}+\frac{2d\mathbf{r}}{dt}+\mathbf{r}=0$

(iii) $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}+\Delta\mathbf{r}=0$

10. தீர்வு காண்க: $\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\mathbf{v}\quad\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\mathbf{u}$

11. $\mathbf{u} = t^2 i - tj + (2t+1)k$ $\mathbf{v} = (2t-3)i + j - t\mathbf{k}$ என்றால், $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\,\mathbf{v})$-ன் மதிப்பை $t = 1$ எனும்போது காண்க.

12. $\mathbf{r} = 5t^2 i + tj - t^3 \mathbf{k}$; $\mathbf{s} = (\sin t)\, i - (\cos t)\,\mathbf{j}$ என்றால்,

(a) $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})$ (b) $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{s})$ இவற்றைக் காண்க.

13. $\mathbf{r} = \mathbf{a} \cos \lambda t + \mathbf{b} \sin \lambda \mathbf{t}$ என்பதில் $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda$ மாறிலிகளானால்,

$$\text{(i)} \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \lambda^2 \mathbf{r} = 0$$

$$\text{(ii)} \quad \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lambda\, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$ எனக் காண்க.

14. $\mathbf{r} = \mathbf{a}\, e^{nt} + \mathbf{b}\, e^{-nt}$ என்பதில் $\mathbf{a}$ $\mathbf{b}$ n மாறிலிகளானால், $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - n^2 \mathbf{r} = 0$ எனக் காண்க.

1.4 மாறா அளவுடைய வெக்டர்

u எனும் வெக்டரின் திசை மாறினும், அளவு மாறாதிருந்தால்,

$$\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

நிருபணம்: $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$

$$\therefore \frac{d}{dt} |\mathbf{u}|^2 = \frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})$$

$$= \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u}\, \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

$$= 2\,\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

$|\mathbf{u}|$ மாருதிருந்தால், அதன் வகைக் கெழு (t எனும் மாறிலியைச் சார்ந்து) பூச்சியமாகும்.

அதாவது $\mathbf{u} \cdot \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = 0$

இதன் மறுதலையும் பொருந்தும் என வழிகளைத் திருப்பக் காண்கிறோம்.

குறிப்பு: u எனும் வெக்டரின் அளவு மட்டும் மாரு திருந்தால் அதுவும், அதன் வகைக் கெழுவும் ஒன்றற் கொன்று குத்தாகும். மறுதலையாக, ஒரு திசையிலியின் சார்பலனான வெக்டர், அத் திசையிலியைச் சார்ந்த வெக்டரின் வகைக் கெழு வெக்டரும் குத்தானுல், வெக்டர் சார்பலனின் திசை மாறினும், அளவு மாருது.

1.5 $\mathbf{u} \times \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = 0$ என்பதின் பொருள்.

$\mathbf{u} \cdot \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = 0$ என்பதன் பொருளை மேலே கண்டோம்.

$\mathbf{u} + \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = 0$ பொருளைக் கூறுவோம்.

't' ன் சார்பலனான வெக்டர் u ஒரே திசையுடையதாக இருக்கத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நியதி,

$$\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0$$

[அதாவது u-ன் திசை மாருதாயின் $\mathbf{u} \times \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = 0$ எனவும், $\mathbf{u} \times \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = 0$ ஆனுல், u திசை மாருது எனவும் நிறுவ வேண்டும்.]

நிருபணம். $\mathbf{u} = u(t)\,\mathbf{e}$ ஆகுக. e என்பது அலகு வெக்டர் (Unit Vector).

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{du}{dt}\mathbf{e} + u\frac{d\mathbf{e}}{dt}$$

$$\therefore \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = u\,\mathbf{e} \times \left[\frac{du}{dt}\mathbf{e} + u\frac{d\mathbf{e}}{dt}\right]$$

$$= u^2\,\mathbf{e} \times \frac{d\mathbf{e}}{dt}$$

e மாறு வெக்டர் எனக் கொண்டால் (அளவிலும் திசையிலும்) $\frac{d\mathbf{e}}{dt} = 0$

அதாவது **u**-ன் அளவு மாறினாலும், திசை மாறாதாயின்,

$\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0$ எனக் காண்கிறோம்.

மறுதலை: $\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0$ என்றால்

$u^2\,\mathbf{e} \times \frac{d\mathbf{e}}{dt} = 0$ ஆனால் $\mathbf{u} \neq 0$ ஆனதால்

$u \neq 0 \;\therefore\; \mathbf{e} \times \frac{d\mathbf{e}}{dt} = 0$

∴ e -ம் $\frac{de}{dt}$-ம் இணையாக இருக்கவேண்டும் $\left[\mathbf{e} \,||\, \frac{d\mathbf{e}}{dt}\right]$ அல்லது $\frac{d\mathbf{e}}{dt} = 0$ [e அலகு வெக்டராதலால் அது பூச்சியமல்ல]. e-ன் அளவு ஓர் அலகு ஆதலால் அளவு மாறுவதில்லை. (முன் தேற்றப்படி).

$\mathbf{e} \cdot \frac{d\mathbf{e}}{dt} = 0$ அதாவது e-ம் $\frac{d\mathbf{e}}{dt}$-ம் குத்தாக வேண்டும். ஆகவே இணையாக இருக்கமுடியாது. ஆதலால், $\frac{d\mathbf{e}}{dt} = 0$ எனும் முடிவுக்கு வருகிறோம். அதாவது e -ன் திசையும் மாறுவதில்லை.

அதாவது,

$$\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0 \text{ என்றால், } \mathbf{u}\text{-ன் திசை மாறாது.}$$

(அது ஒரு கோட்டிற்கு இணையாக இருக்கும்).

1.6. வரைகள் (Curves)

முப்பரிமாண வெளியில் உள்ள வரைகளைப் பற்றி ஆராய்வோம். ஏதேனும் ஒரு புள்ளி O வை ஆதியாகவும், $Oxyz$ எனும் ஒன்றற்கொன்று குத்தான மூன்று நேர்கோடுகளை அச்சாகவும் கொள்ள, ஒரு புள்ளியின் கார்டீசியக் கூறுகள் x, y, z ஆகும். இவை ஒவ்வொன்றும் 't' எனும் மாறியின் சார்பலன்களானால், அதாவது,

$$x = x(t);\ y = y(t),\ z = z(t)$$

எனும் ஒரே மதிப்புடைச் சார்பலன்கள் t-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் தரும், (x, y, z) என்ற எண்களைக் கூறுகளாகவுடைய புள்ளித் தொகுதி (Set or aggregate of points) வரை எனப்படும். 't' எனும் மாறி துணை அளவி (Parameter) எனப்படும். $a \le t < b$ எனும் இடைவெளியில் t–க்குள்ள ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் வரையில் ஒரே ஒரு புள்ளியைத் தரும். இந்த இடைவெளியில் $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ என்பவை தொடர்ச்சியுடை (Continuous) சார்பலன்களானால், வரையும் அந்த இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையது எனப்படும்.

$t = a$ எனும் போதும், $t = b$ எனும்போதும் ஒரே புள்ளி வந்தால், முனையிலா வரை அல்லது மூடியவரை (Closed curve) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x = \cos t \quad y = \sin t \quad z = 0 \quad (-\pi \le t \le \pi)$ எனும் வரையைக் காண்போம்.

$t = \pi,\ t = -\pi$ எனும் இரு மதிப்புகளும் $(-1, 0, 0)$ எனும் ஒரே புள்ளியைத் தருகின்றன. 't'-ன் இடைவெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் ஒரே புள்ளியை மேற் கூறிய சமன்பாடுகள் தருகின்றன. இங்கு வரை, ஆதியை மையமாக அலகு ஆரம் உள்ள வட்டம் [முனையிலாவரை அல்லது மூடிய வரை] என்பது எளிதில் புரியும்.

$t = 2\tan^{-1} u$ என மாற்றினால் மற்றொரு துணை அளவிச் சமன்பாடு இதே வட்டத்திற்குக் காணலாம். அதாவது

$$x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \quad y = \frac{2u}{1 + u^2} \quad z = 0$$

$$(-\infty \leq u \leq \infty).$$

[இங்கு $\dfrac{dt}{dt} = \dfrac{2}{1 + u^2} > 0$ என்பதைக் காணவும்.]

பொதுவாக $x = x(t)$, $y = y(t)$ $z = z(t)$ எனும் வரையில் சாதாரணப் புள்ளி (Ordinary point) t-ன் ஒரு மதிப்புக்கு இருக்க வேண்டுமானால் $x'(t), y'(t)$, $z'(t)$ எனும் வகைக் கெழுக்கள் இருக்கவும் வேண்டும்; அவை தொடர்ச்சி உடையதாக இருக்கவும் வேண்டும். அன்றியும் ஏதேனும் ஒரு வகைக் கெழுவாவது 't'-ன் அந்த மதிப்புக்குப் பூச்சியமாக இல்லாதிருக்க வேண்டும்.

இவ்வாறு சாதாரணப் புள்ளிகளால் மட்டுமே ஆன வரையின் வில் (ஓர் இடைவெளியில்) ஒழுங்காக (smooth) இருக்கிறது எனப்படும்.

't' எனும் துணை அளவியிலிருந்து 'u' எனும் துணை அளவிக்குச் சமன்பாட்டை மாற்ற, $t = \phi(u)$ எனும் தொடர்பைப் பயன்படுத்தலாம்.

அப்போது $a \leq t \leq b$ எனும் இடைவெளி $\alpha \leq u \leq \beta$ என மாறும்.

இங்கு $a\ \phi(\alpha)$ $b = \phi(\beta)$. அல்லாமலும் இடைவெளியில் $\phi'(u) > 0$ எனவும், $\phi'(u)$ தொடர்ச்சியுடையதுமாக இருக்க வேண்டும்.

[$\phi'(u) < 0$ என்றால் $\phi(u)$ இறங்கு சார்பலனாகும்; இடைவெளி $\beta \leq u \leq \alpha$ ஆகும்.]

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dt}\phi'(u) \quad \frac{dy}{du} = \frac{dy}{dt}\phi'(u) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{du}\phi'(u)$$

ஆனதால் 'u'-ன் ஒத்த மதிப்புக்குப் புள்ளி சாதாரணப் புள்ளியே யாகும்.

[இவ்வாறு ஒழுங்கு வரையின் இலக்கணங்களைக் கூறி னோம்.]

1.7 வரையின் வெக்டர் சமன்பாடு

மூன்று திசையிலிச் சமன்பாடுகளால் கூறுவதற்குப் பதிலாக வெக்டர் சமன்பாடு ஒன்றினால் மட்டும் கூற முடியும்.

அதாவது மூன்று சமன்பாடுகளையும் தொகுத்து ஒரு சமன் பாடாகக் கூறுகிறோம்.

புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\mathbf{r}$ என்றால்

$\mathbf{r} = xi + y\mathbf{j} + zk$ ஆகும்.

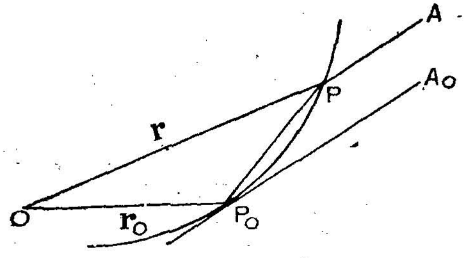
ஆனால் $x = x(t)$, $y = y\ (t)$, $z = z\ (t)$ ஆனதால் $\mathbf{r}$ எனும் வெக்டர் t-ன் சார் பலனாகும்.

$\therefore$ வரையின் சமன்பாடு $\mathbf{r} = \mathbf{r}\ (t)$ என ஆகிறது.

O என்பது ஆதியாகவும், P என்பது $\mathbf{r}$ நிலை வெக்டருள்ள வரையின் மேலுள்ள புள்ளியுமானால்

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \mathbf{r}\ (t) \text{ ஆகும்.}$$

1.8 வரையில் ஒரு புள்ளியில் உள்ள தொடு கோட்டு வெக்டர் (Tangent Vector at a point on the curve)



படம் 1.

$\mathbf{r} = \mathbf{r}\ (t)$ எனும் சமன்பாடு தரும் வரையில் $t = t_o$ எனு மிடத்துள்ள புள்ளி P_o ஆகுக.

$t = t_o + \Delta t$ எனுமிடத்து P_o-க்கு அடுத்த புள்ளி P ஆகுக. [$a \leq t \leq b$ எனும் இடைவெளியைக் கொள்வோம்.] O என்பது ஆதியாகுக.

$$\therefore \quad \overrightarrow{OP_o} = \mathbf{r}\,(t_o) \quad \overrightarrow{OP} = \mathbf{r}\,(t_o + \Delta t) = \mathbf{r}\ \ (t_o) + \Delta\,\mathbf{r}$$

$$\therefore \quad \frac{\overrightarrow{P_o\,P}}{\Delta\,t} = \frac{\Delta\,\mathbf{r}}{\Delta\,t} = \frac{\Delta\,x}{\Delta\,t}\,\mathbf{i} + \frac{\Delta\,y}{\Delta\,t}\ \ \mathbf{j} + \frac{\Delta\,z}{\Delta\,t}\,\mathbf{k}$$

$t \to t_o$ ஆகும் போது

$$\frac{d\,\mathbf{r}}{d\,t} = \frac{d\,x}{d\,t}\mathbf{i} + \frac{d\,y}{d\,t}\mathbf{j} + \frac{d\,z}{d\,t}\mathbf{k}$$

வரையில் உள்ள சாதாரண புள்ளிகளில் மூன்று வகைக் கெழுக்களில் ஒன்றேனும் பூச்சியமல்லாது இருக்குமாதலால் $\frac{d\,\mathbf{r}}{d\,t} \neq 0$

$\therefore \quad t \to t_o$ எனும் போது $P_o\,P$ எனும் கோட்டின் எல்லை நிலை P_o வழியாக $\frac{d\,\mathbf{r}}{d\,t}$ எனும் வெக்டருக்கு இணையான கோடாகும்; ஆனால், கோட்டின் எல்லை நிலை $P_o\,A_o$ எனும் P_o–ல் உள்ள தொடு கோடாதலால் $\frac{d\,\mathbf{r}}{d\,t}$ எனும் வெக்டரை வரைக் 5 P_o எனும் புள்ளியில் உள்ள **தொடு கோட்டு வெக்டர்** (T ıngent Vector) என வழங்கப்படுகிறது.

படத்தில் $\Delta t > 0$. $\frac{\Delta\,\mathbf{r}}{\Delta\,t} = \overrightarrow{P_oP}$. $\overrightarrow{P_oA}$ என்பது $\overrightarrow{P_oP}$-ன் அதாவது $\frac{\Delta\,\mathbf{r}}{\Delta\,t}$ நேரெண் மடங்காகும் (Postive multiple).

$\Delta t < 0$ என்றால், $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta\,t}$, $\overrightarrow{P_oP}$-ன் எதிரெண் மடங்காகும். $\overrightarrow{P_oA}$–ன் திசை எதிர்மாறும். எவ்வாறுயினும் $\overrightarrow{P_oA}$ என்பதன் எல்லை நிலை 't' **அதிகரிக்கும் திசையில்** உள்ள $\overrightarrow{P_oA_o}$ எனும் தொடு கோடாகும்.

$\therefore \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}\,(t)$ எனும் வரையில் $\frac{d\,\mathbf{r}}{d\,t}$ என்பது எல்லாச் சாதாரணப் புள்ளிகளிலும் 't' அதிகரிக்கும் திசையில்உள்ள தொடு கோட்டு வெக்டராகும்.

எடுத்துக்காட்டு: $x = t^2 + 1 \quad y = \Delta t - 3 \quad z = 2t^2 - 6t$

எனும் வரைக்கு $t = 2$ எனுமிடத்துள்ள தொடு கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[**a** எனும் நிலை வெக்டர் உள்ள ஒரு புள்ளி வழி **b** எனும் வெக்டருக்கு இணையாகவுள்ள நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $\mathbf{r} - \mathbf{a} = \lambda\, \mathbf{b}$ ஆகும். λ என்பது துணை அளவி (Parameter).] இதைப் பயன்படுத்துவோம்.

$t = 2$ எனும் இடத்துள்ள புள்ளி $(5, 5 - 4)$ ஆகும். அதாவது அதன் நிலை வெக்டர் $\mathbf{a} = 5\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}$.

தொடு கோட்டுக்கு இணை வெக்டர் $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ($t = 2$ எனுமிடத்து)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

$$= 2t\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + (4t - 6)\,\mathbf{k}$$

$\therefore \quad t=2$ என்றால், $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{e} = 4\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$.

$$\therefore \quad (x i + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) - (5\,i + 5\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}) = \lambda\,(4\,i + 4\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k})$$

$\therefore \quad \frac{x-5}{4} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+4}{2} = \lambda$ என்பது தொடு கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

[**குறிப்பு:** மேலே விரிவாக வழி எழுதியுள்ளோம். $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$-ன் பிரிவுகள் $t = 2$ எனுமிடத்து $(4, 4, 2)$ ஆகவே $x - 5$, $y - 5$, $z + 4$ இதன் மடங்குகள்.

$\therefore \quad \frac{x-5}{4}, = \frac{y-5}{4} > \frac{z+4}{2}$ என எழுதலாம்.]

1.9. அலகுத் தொடு கோட்டு வெக்டர். (Unit Tangent Vector)

வரையின் சமன்பாடு 't' எனும் துணை அளவியில் $\mathbf{r} = r\,(t)$ ஆகுக. $t = a$ எனும் மதிப்புதரும் **a** எனும் நிலை வெக்டருடைய வரைமேல் உள்ள புள்ளி A-லிருந்து

r எனும் நிலை வெக்டர் தரும் P எனும் புள்ளிக்கு வரையின் நீளம் s ஆகுக.

$$\text{அப்போது}\quad s = \int_a^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 - z'(t)^2}\, dt$$

$$= \int_a^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt \qquad (a \leq t \leq b)$$

[இது ஒழுங்கான வரையின் நீளத்தைத் தரும் சூத்திரமாகும். தொகை நுண் கணிதத்தில் கூறப்பட்டுள்ளது.]

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| > 0$$

∴ 's' என்பது t-ன் தொடர்ச்சியுறு சார்பலனாகும். ஆகவே, 't' ஐயும் s-ன் தலைகீழ்ச் சார்பலனாகக் கூறலாம்.

∴ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ என்பதை 't'-லிருந்து 's' எனும் துணையளவிக்குத் தொடர்ச்சியுறு சார்பலனாக மாற்ற முடியும்.

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ஆகுக.

அப்போது $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ என்பது தொடுகோட்டு வெக்டராகும்.

ஆனால், $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$ என்பதிலிருந்து $\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \frac{ds}{ds} = 1$ என வருகிறது.

ஒரு வரையின் சமன்பாட்டை, அதன்மேல் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்துள்ள, வரை வழித் தூரம் s ஐத் துணையளவியாகக் கொண்டு சமன்பாட்டை $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ எனக் கூறினால், $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ என்பது அலகுத் தொடு கோட்டு வெக்டர் (Unit Tangent Vector) ஆகும். இதை **T** எனக் குறிப்போம் [**t** எனவும் சில நூல்களில் குறிப்பது வழக்கம்].

குறிப்பு: P_0 எனுமிடத்து $P_0 P$ என்பது நாண் ஆகுக.

$P_0 P = \Delta \mathbf{r}$ ஆகுக. $P_0 P$ எனும் வில்லின் நீளம் Δs ஆகுக.

$$\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{|\Delta s|} = \left|\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}\right|$$

$\Delta s \to 0$ ஆகும்போது இதன் எல்லை $\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = 1$ ஆகவே ஒரு நாணின் நீளத்திற்கும், அது தாங்கும் வில்லின் நீளத்திற்கும் உள்ள விகிதம், வில்லின் நீளம் 0 வை அணுகும்போது 1 ஐ அணுகும்.

[அதாவது முதற்படி நுண் எண்களை மட்டும் கொண்டால் சிறு வில்லின் நீளம், நாணின் நீளமாகும்.]

1.10. அலகுத் தொடுகோட்டின் திசைக்கோணங்கள்:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}$$

$$\therefore \mathbf{T}\, i = \frac{dx}{ds} \quad \mathbf{T}\, j = \frac{dy}{ds} \quad \mathbf{T}\ \mathbf{R} = \frac{dz}{ds}$$

$\therefore$ T-ன் திசைக் கோசைன்கள் அதாவது **i**, **j**, **R** திசைகளுடன் **T** எனும் திசை ஏற்படுத்தும் கோணங்களின் கோசைன் விகிதங்கள் முறையே $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ ஆகும்.

குறிப்பு 1. **R** எனும் அலகு வெக்டரைக் கொள்வோம்.

$|\mathbf{R}| = 1$ ஆனல் திசை மாறலாம். திசையைக் கோணத்தில் ரேடியன் அளவையில் சொன்னல் **R** என்பது 'θ' என்பதன் சார்பலனுகும். $\mathbf{r} = \mathbf{R}\ (\theta)$ என்பது ஆதியை மையமாகவும், அலகு ஆரமுள்ள வட்டமாகும்.

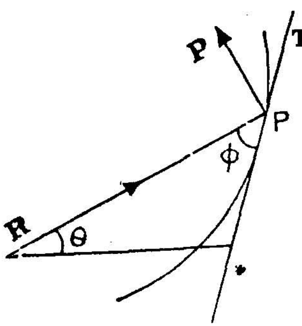
$\theta = 0$ எனும் இடத்திலிருந்து வில்லின் நீளத்தை அளந்தால், நீளம் $s = \theta$ ஆகும்.

$\mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{d\theta} = 0$ ஆனதால், $\frac{d\mathbf{R}}{d\theta}$, $\mathbf{r}$ எனும் வெக்டருக்குக் குத்தாகும். $\frac{d\mathbf{R}}{d\theta} = \mathbf{P}$ என்றால்,

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\theta} = \mathbf{R}(\theta + \pi) = -\mathbf{R} \text{ என வரும்.}$$

குறிப்பு 2. ஒரு சமதள வரையை அதன் கோணதூரக் கூறுகளில் (Polar Coordinates) $r = f(\theta)$ என்போம்.



படம் 2.

வெக்டர் சமன்பாட்டில் $\mathbf{r} = r\,\mathbf{R}(\theta)$ எனலாம்.

(θ திசையில் $\mathbf{R}$ அலகு வெக்டர்).

s ஐச் சார்ந்த வகைக் கெழு காண:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dr}{ds}\mathbf{R}(\theta) + \frac{r\,d\mathbf{R}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds}.$$

$$= \frac{dr}{ds} + \mathbf{R}\,\frac{r\,d\theta}{ds}\,\mathbf{P}$$

$$\therefore \mathbf{R}\ \mathbf{T} = \frac{dr}{ds} \quad \mathbf{P} \cdot T = r\,\frac{d\theta}{ds}$$

$\therefore$ (i) புள்ளிக்குள்ள ஆரைக்கும், தொடுகோடு கோட்டுக்கு மிடையேயுள்ள கோணம் ϕ என்றால் $\cos\phi = \frac{dr}{ds}$

(ii) புள்ளியில் ஆரையின் குத்துக் கோட்டிற்கும், தொடு கோட்டிற்கு மிடையேயுள்ள கோணத்தின் கோசைன் விகிதம்

$$\frac{r\,d\theta}{ds}; \text{ அதாவது } \sin\phi = \frac{r\,d\theta}{ds}$$

1.11. முக்கிய செங்கோடும், வரையின் வளைவும் (Principal normal and Curvature)

வில்லின் நீளம் கணக்கிடமுடியும் வரை (rectifiable curve) யின் சமன்பாடு $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ஆகுக.

P வரையில் ஒரு புள்ளியானல், 0 ஆதியானல்,

$$\mathbf{OP} = \mathbf{r} \text{ ஆகும்.}$$

P - ல் $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{T}$ என்பது அலகுத் தொடுகோட்டு வெக்டர் (Unit Tangent Vector). $\mathbf{T}$ - ன் நீளம் — அதாவது அளவு — மாருதாகையால் $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ என்பது $\mathbf{T}$-க்குக் குத்தான வெக்டராகும்.

P வழி, $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ எனும் வெக்டர் திசையில் உள்ள கோடு, வரைக்கு P-ல் உள்ள **முக்கிய செங்கோடு** எனப்படும்.

[வரை முப்பரிமாண வெளியில் அமைந்துள்ளது. P வழி $\mathbf{T}$-க்குக் குத்தாக ஒரு சம தளம் உள்ளது. இத் தளத்தில் அமையும் கோடுகள் யாவையுமே செங்கோடுகள் எனலாம். ஆனல், $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ திசையில் அமையும் செங்கோட்டைத் 'தலையாய செங்கோடு' அல்லது 'முக்கிய செங்கோடு' (Principal Normal) என்கிறோம்.] முக்கிய செங்கோட்டுத் திசையில் உள்ள **அலகு வெக்டரை** $\mathbf{N}$ எனக் குறிப்போம் ($\mathbf{n}$ எனவும் குறிப்பது வழக்கம்]. அப்போது,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}$$

இங்கு κ, [இதை 'கப்பா' என வாசிக்கவும் K எனும் எழுத்துக்கேற்ப கிரேக்க எழுத்தாகும்] நேர்த்திசையிலி எண்ணாகும் (non negative scalar). இது வரையின் 'வளைவு' (Curvature) எனப்படும். [Curvature என்பதை வாசிக்கும்போது முதல் சப்தம் K சப்தமாதலால், K எனும் எழுத்தால் வளைவு அளவு தரப்படுகிறது]. $\dfrac{1}{K} = \rho$ என்றால் ρ [இதை 'ரோ' என

வாசிக்கவும்] என்பது வளைவு ஆரம் (Radius of curvature) எனப்படும்.

1–12 ஃப்ரெனெட் சூத்திரங்கள் (Frenet's formula)

$T \times N$ எனும் வெக்டரை B எனக் குறிப்போம். P எனும் புள்ளியில் T, N, B எனும் ஒன்றற்கொன்று குத்தான அலகு வெக்டர்கள் வலஞ்சுழி மரபை ஒட்டி (Dextral or right handed rule) அமைந்து P எனும் முனையைக்கொண்ட முப்பட்டை (Trihedral) யாகிறது. P வரையில் நகரும்போது இதுவும் நகருகிறது. P-ல் B எனும் வெக்டரின் திசையில் அமைந்துள்ள செங்கோட்டை இரட்டைச் செங்கோடு (Binormal) என்கிறோம். இதன் திசையில் உள்ள B எனும் அலகு வெக்டர் 'அலகு இரட்டைச் செங்கோடு' (Unit Binormal) எனப்படும்.

B அலகு வெக்டராதலால்

$\frac{dB}{ds}$ ($\neq 0$ ஆனால்) **B-க்குக் குத்தாகும்.**

$$B = T \times N \text{ ஆனதால்,}$$

$$\frac{dB}{ds} = \frac{dT}{ds} \times N + \frac{T \times dN}{ds} \quad (\text{ஆனால் } \frac{dT}{ds} \parallel{}' N$$

$$\therefore \frac{dT}{ds} N = 0) \quad \therefore \frac{dB}{ds} = T \times \frac{dN}{ds}$$

$\therefore \frac{dB}{ds}$ ஆனது T-க்கும் குத்தாகும்

$\therefore$ B-க்கும் T-க்கும் குத்தாகவுள்ள வெக்டர் N ஆகும்.

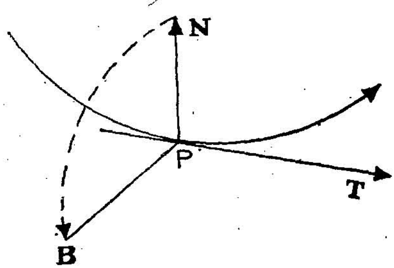
$\frac{dB}{ds}$, N-ன் மடங்காகும்.

$$\therefore \frac{dB}{ds} = -\tau N \text{ என்போம்.}$$

[τ என்பதை 'டோ' என வாசிக்கவும். இது ஆங்கில எழுத்து T-க்கு ஒத்தது.] τ என்னும் திசையிலி P-ல் வரையின் முறுகினை (Torsion) அளப்பதாகும். [Torsion—முறுகு]

குறிப்பு: $\tau > 0$ என்றால் $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$-ன் திசை $\mathbf{N}$-க்கு எதிராகும்.

P வரையில் s அதிகரிக்கும் திசையில் நகரும்போது $\mathbf{T}$ ஐச் சுற்றி $\mathbf{B}$, வலம்புரித் திருகு $\mathbf{T}$ திசையில் முன்னேறும்போது சுழல்வது போன்று சுழலும். கீழே படம் பார்க்கவும்.



படம் 3.

இப்போது $\frac{d\mathbf{N}}{ds}$ என்ன என்பதைப் பார்ப்போம்.

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$$ [T, N, B என்பவை ஒன்றற்கொன்று குத்தான அலகு வெக்டர்களாதலால்]

$$\therefore \quad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{ds} \times \mathbf{T} + \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{T}}{ds}$$

$$= -\tau\, \mathbf{N} \times \mathbf{T} + \kappa\, \mathbf{B} \times \mathbf{N}$$

ஆனால் $\mathbf{N} \times \mathbf{T} = -\mathbf{B}$; $\mathbf{B} \times \mathbf{N} = -\mathbf{T}$

$$\therefore \quad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\, \mathbf{B} - \kappa\, \mathbf{T}$$

சூத்திரங்களைத் தொகுத்துக் கூறுவோம்.

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \qquad \kappa\, \mathbf{N}$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa \mathbf{T} \qquad\qquad + \tau \mathbf{B}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \qquad\qquad -\tau N$$

இவை ∴ப்ரெனட் சூத்திரங்கள் எனப்படும். முப்பரிமாண வெளிவரைகளை ஆராய்வதில் அடிக்கடி பயன்படும் சூத்திரங் களாகும்.

[$\bar{\delta}$ என்பது டார்போ (Darboux) வெக்டர் எனப்படும்.]

$\bar{\delta} = \tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B}$ ஆகும்.
அப்போது ∴ப்ரெனட் சூத்திரங்கள் கீழ்வருமாறு

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \bar{\delta} \times \mathbf{T} \qquad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \bar{\delta} \times \mathbf{N} \qquad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \bar{\delta} \times \mathbf{B}$$

என எளிதாகக் கவனம் பண்ணும் வகையில் அமைகின்றன.]

குறிப்பு 1: T, N அடக்கும் தளம் 'கொஞ்சும் தளம்' (Osculating Plane) அல்லது 'வளைவு தளம்' (Plane of Curvatvre) எனப்படும்.

குறிப்பு 2: $\frac{1}{\tau}$ என்பதை σ எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

σ என்பதை முறுகு ஆரம் (Raduis of Torsion) என்பர். κ என்பது நேரெண்ணாகும். நேர்கோட்டில் $\kappa = 0$. κ எதி ரெண்ணாகாது. ஆனால் τ நேரெண்ணோ அல்லது எதிரெண் ணோவாக இருக்கலாம்.

குறிப்பு 3: ஒரு வரையின் எல்லா இடத்தும் $\tau = 0$ என்றால் $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = 0$ ஆகும். ∴ B திசையிலும் அளவிலும் மாறாத வெக்டர்.

ஆனால் $\mathbf{B}\cdot\mathbf{T} = 0$

$$\mathbf{B}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds} = 0$$

$$\therefore \mathbf{B}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

B–க்குக் குத்தான தளத்தில் வரை அமைகிறது. அது சமதள வரையாகிறது. முறுகு இல்லாத வரைகள் சமதள வரைகளாகும்.

1.13. வளைவு, முறுகு இவற்றின் சூத்திரங்கள் வெக்டரில் $\mathbf{r} = \mathbf{r}\ (t)$ எனும் வரைக்கு

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} \quad \text{(ii)} \quad \tau = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}$$

எனக் காண்க. [$\dot{\mathbf{r}}$ என்பது 't' ஐச்சார்ந்த $\mathbf{r}$-ன் வகைக்கெழு]

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\,\mathbf{T}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{s}\,\mathbf{T} + \dot{s}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{ds}\,\dot{s} = \ddot{s}\,\mathbf{T} = \dot{s}^2\kappa\mathbf{N}$$

$$\dddot{\mathbf{r}} = \dddot{s}\,\mathbf{T} + \dot{s}\,\ddot{s}\,\kappa\,\mathbf{N} + (2\dot{s}\ddot{s}\,\kappa + \dot{s}^2\dot{\kappa})\,\mathbf{N}$$

$$+ \dot{s}^3\kappa(-\kappa\mathbf{T} + T\mathbf{B})$$

$$= (\dddot{s} - \dot{s}^3\kappa^2)\,\mathbf{T} + (3\dot{s}\ddot{s}\,\kappa + \dot{s}^2\,\dot{\kappa})\,\mathbf{N} + \dot{s}^3\kappa T\,\mathbf{B}$$

(i) $\therefore\ \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \dot{s}^3\,\kappa\,B$

$$\therefore\ |\dot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{r}}| = |\dot{s}^3|\,\kappa \qquad |\dot{\mathbf{r}}| = |\dot{s}|$$

$$\therefore\ \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} = \kappa. \text{ அல்லது } \rho = \frac{|\dot{\mathbf{r}}^3|}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}$$

(ii) $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dddot{\mathbf{r}} = \dot{s}^3\kappa B \cdot \dddot{\mathbf{r}}$

$$= \dot{s}^6\,\kappa^2\,\tau$$

$$\therefore\ \frac{\dot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2} = \tau$$

குறிப்பு: **T, B** இவற்றின் திசைகள் $\dot{\mathbf{r}}$, $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$ என்பவற்றின் திசைகள் எனக் காண்கிறோம்.

$\mathbf{N}=\mathbf{B}\times\mathbf{T}$ அல்லது $-\mathbf{T}\times\mathbf{B}$ என்பதிலிருந்து அதன் திசை $(\dot{r}\times\ddot{r})\dot{\mathbf{r}}$ என்பதன் திசையாகும்.

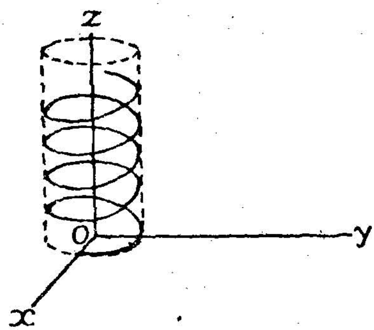
கணக்கு 1. $x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=4t$

எனும் வரைக்கு (*a*) அலகுத் தொடு கோட்டு வெக்டர் (*b*) முக்கிய அலகுச் செங்கோடு (*c*) வளைவு (*d*) இரட்டைச் செங்கோடு (*e*) முறுகு இவற்றைக் காண்க.

[இந்த வரை வட்ட ஹெலிக்ஸ் என வழங்கப்படும்]

தீர்வு :

$\mathbf{r}=3\cos t\,\mathbf{i}+3\sin t\,\mathbf{j}+4\,t\,\mathbf{k}$



வட்ட ஹெலிக்ஸ் (வட்ட உருளையின் மேலே அமையும் திருகு வரை.)

$\dot{\mathbf{r}}=-3\sin t\,\mathbf{i}+3\cos t\,j+4\,\mathbf{k}$

$\ddot{\mathbf{r}}=-3\cos t\,\mathbf{i}-3\sin t\,\mathbf{j}$

$\dddot{\mathbf{r}}=3\sin t\,\mathbf{i}-3\cos t\,\mathbf{j}$

$$\mathbf{T}=\mathbf{T}\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\div\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt}=\left|\frac{dr}{dt}\right|=\sqrt{\dot{r}\cdot\dot{r}}=\sqrt{(-\sin t)^2+(3\cos t)^2+16}=5.$$

$$\therefore \quad \mathbf{T} = \tfrac{1}{5}\{-3\sin t\,\mathbf{i} + 3\cos t\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}\}$$

$$\kappa\,\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \qquad \therefore \quad \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \tfrac{1}{5}\{-3\cos t\,\mathbf{i} - 3\sin t\,\mathbf{j}\} \qquad \frac{ds}{dt} = 5$$

$$\therefore \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \tfrac{1}{25}\{-\cos t\,\mathbf{i} - 3\sin t\,\mathbf{j}\}$$

$$\therefore \kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{1}{25}\sqrt{9\cos^2 t + 9\sin^2 t} = \frac{3}{25}$$

$$\therefore \mathbf{N} = \frac{25}{3}\cdot\frac{1}{25}\{-3\cos t\,\mathbf{i} - 3\sin t\,\mathbf{j}\} = \{-\cos t\,\mathbf{j} + \sin t\,\mathbf{j}\}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$$

$$= \{-\tfrac{3}{5}\sin t\,\mathbf{i} + \tfrac{3}{5}\cos t\,\mathbf{j} + \tfrac{4}{5}\,\mathbf{k}\}$$

$$\times\{-\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\}$$

$$= \tfrac{4}{5}\sin t\,\mathbf{i} - \tfrac{4}{5}\cos t\,\mathbf{j} + \tfrac{3}{5}\,\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\,\mathbf{N} \qquad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{dt} \div \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{1}{25}\{4\cos t\,i + 4\sin t\,\mathbf{j}\} = -\tau(-\cos t\,i - \sin t\,\mathbf{j})$$

$$\therefore \tau = \frac{4}{25}$$

மாற்று வழி :

[k, τ மட்டும் காண அவற்றின் சூத்திரங்களைப் பயன் படுத்தலாம்.

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$$

$$\tau = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}$$

இவற்றைப் பயன்படுத்திச் சரி பார்ப்போம்.

[வெக்டர்களை அதன் பிரிவுகளாக எழுதும் போது, $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ என எழுதுவதற்குப் பதிலாக $\mathbf{r} = [x_1\, y_1\, z_1]$ என வரிசை அணியாக (Row matrix) எழுதுவோம். இதனால் **i**, **j**, **k** என்பவற்றை மீண்டும் மீண்டும் எழுதுவது தவிர்க்கப் படும்].

$$r = \{3 \cos t,\ \ 3 \sin t\ 4\ t\}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \{-3 \sin t,\ 3 \cos t,\ 4\}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \{-\cos t,\ -3 \sin t,\ 0\}$$

$$\dddot{\mathbf{r}} = \{\sin t,\ -3 \cos t,\ 0\}$$

$$\therefore\ |\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t + 16} = 5.$$

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \{12 \sin t,\ -12 \cos t,\ a\}$$

$$\therefore\ |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| = \sqrt{144 \sin^2 t + 144 \cos^2 t + 81} = 15$$

$$\therefore\ \kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{r}|^3} = \frac{15}{125} = \frac{3}{25}$$

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dddot{\mathbf{r}} = 36$$

$$\therefore\ \tau = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \times \dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2} = \frac{36}{15 \times 15} = \frac{4}{25}$$

கணக்கு (1) குறிப்பிலிருந்து T-ன் திசை $\dot{\mathbf{r}}$ என்பதாகும்.

$$\therefore \mathbf{T} = \tfrac{1}{5}\{-3\sin t, 3\cos t, 4\}$$

B-ன் திசை $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$ என்பதன் திசை

$$\therefore \quad \mathbf{B} = \frac{1}{15}\{12\sin t, -12\cos t, 9\}$$

அல்லது $\mathbf{B} = \tfrac{1}{5}\{4\sin t, -4\cos t, 3\}$

$\mathbf{N} = -\mathbf{T} \times \mathbf{B}$ என்பதால்

$$\therefore \quad \mathbf{N} = \frac{-1}{25}\{25\cos t, 25\sin t\ 0\}$$

$$\mathbf{N} = -\{\cos t, \sin t, 0\}$$

கணக்கு 2 :

$x = 2t \quad y = t^2 \quad z = \dfrac{t^3}{3}$ எனும் முறுகிய முப்படி வரைக்கு (Twisted cubic)

$t = 1$ எனுமிடத்து $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}, \kappa, \tau$ இவற்றைக் காணவும் இவற்றுடன் கொஞ்சும் தளத்தின் சமன்பாடு காணவும்.

தீர்வு :

வரையின் சமன்பாடு $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \left\{2t, t^2, \dfrac{t^3}{3}\right\}$

$$\therefore \quad \dot{\mathbf{r}} = \{2, 2t\ t^2\}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \{0, 2, 2t\}$$

$$\dddot{\mathbf{r}} = \{0, 0, 2\}$$

$\therefore\ t = 1$ எனுமிடத்து $\dot{\mathbf{r}} = \{2, 2, 1\} \quad \therefore\ |\dot{\mathbf{r}}| = 3$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \{0, 2, 2\}$$

$$\dddot{\mathbf{r}} = \{0, 0, 2\}$$

$$\therefore\ \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \{2, -4, 4\} \quad \therefore\ |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| = 6$$

$$\therefore\ \mathbf{T} = \tfrac{1}{3}\{2, 2, 1\} \quad \mathbf{B} = \tfrac{1}{6}\{2, -4, 4\} = \tfrac{1}{3}\{1, -2, 2\}$$

$$\therefore\ \mathbf{B} = \tfrac{1}{3}\{1, -2, 2\}$$

$$\therefore\ \mathbf{N} = -\tfrac{1}{9}\{6 - 3 - 6\} = \tfrac{1}{3}\{-2, 1, 2\}$$

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} \quad \tau = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

கொஞ்சும் தளத்தின் செங்கோடு **B** ஆகும். அது $(2, 1, \tfrac{1}{3})$ எனும் புள்ளி வழி $(1, -2, 2)$ எனும் கோட்டிற்குக் குத்தாக உள்ளது.

$\therefore$ அதன் சமன்பாடு $(x-2) - 2\,|y-1|) + 2\,(3-\tfrac{1}{3}) = 0$ ஆகும்.

[**a** எனும் நிலைவெக்டர் உடைய புள்ளி **p** எனும் வெக்டருக்குக் குத்துத் தளத்தின் சமன்பாடு $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{p} = 0$]

பயிற்சி 2

கீழ்வரும் வரைகளுக்கு (i) வளையாரம் ρ (ii) முறுகு τ காணலாம்.

1. (i) $x = t \quad y = t^2 \quad z = \tfrac{2}{3}\, t^3 \quad \left[\begin{array}{l} \rho = \dfrac{(1+2t^2)^2}{2} \\ \tau = 1/\rho \end{array}\right]$

(ii) $x=a\cos t \quad y=a\sin t \quad z=bt.$ $\left[\begin{array}{l}\rho=\dfrac{a^2+b^2}{a}\\ \tau=b/a^2+b^2\end{array}\right]$

(iii) $x=a\,(3t-t^3)\ y=3\,at^2 \quad z=a\,(3t+t^3)$

$$\left[\kappa=\tau=3a\,\frac{1}{(1+t^2)^2}\right]$$

2. மேற் கணக்கில் (i)-ல் உள்ள வரைக்கு $t=1$ என்னுமிடத்து **T, N, B** காண்க.

3. $x=e^t \quad y=e^{-t} \quad z=\sqrt{2}\,t$ எனும் வரையில்

$\kappa=-\tau=\sqrt{2}\,(e^t+e^{-t})^2$ எனக் காண்க.

4. $x=\dfrac{2t+1}{t-1} \quad y=\dfrac{t^2}{t-1} \quad z=t+2$

எனும் வரைக்கு t எனும் புள்ளியில் முறுக்கைக் காண்க. விடையிலிருந்து தெரிவது என்ன?

[$\tau=0$, வரை சமதளத்தில் உள்ளது. அதன் சமன்பாடு $x-3y+3z=5$]

5. $x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=4t$ எனும் வரைக்கு $t=\pi$ எனும் இடத்து, (i) தொடு கோட்டு வெக்டர் (ii) முக்கிய செங்கோட்டு வெக்டர் (iii) இரட்டைச் செங்கோட்டு வெக்டர் இவற்றின் சமன்பாடு காண்க.

[$\mathbf{r}=\mathbf{r}_o+\lambda\,\mathbf{T}_o;\ \ \mathbf{r}=\mathbf{r}_o+\lambda\,\mathbf{N}_o\ \ \mathbf{r}=\mathbf{r}_o+\lambda\,\mathbf{B}_o$ என்பவை முறையே வெக்டர் சமன்பாடுகள்]

[விடை தொடுகோடு: $x=3;\ y=-\frac{3}{5}t,\ z=4\pi+\frac{4}{5}t$

முக்கிய செங்கோடு: $x=-3+t\ \ y=4\pi\ \ z=0$

இரட்டைச் செங்கோடு: $x=-3;\ y=4\pi+\frac{4}{5}t\ z=\frac{3}{5}t$]

6. ஒரு வளை வரையின் ஏதேனும் புள்ளியில் உள்ள t எனும் அலகுத் தொடுகோட்டு வெக்டரும் $\bar{n}$ எனும் முக்கிய செங்

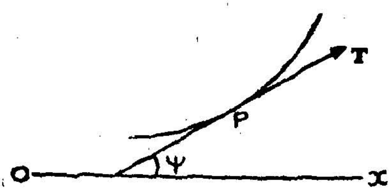
கோட்டு வெக்டரும் முறையே ஒரு குறிப்பிட்ட நேர்கோட்டுடன் θ, ϕ எனும் கோணச் சாய்வில் இருந்தால்

$$\frac{\sin\theta\, d\theta}{\sin\phi\, d\phi} = -\frac{\kappa}{\tau} \text{ என நிறுவுக.}$$

1.14 சமதள வரைகள்: ஒரு வரைக்கு முறுகு $\tau = 0$ என்றால் அந்த வரை ஒரு தளத்தில் அமைய வேண்டும் எனக் கூறினோம். [பக்கம் 22, குறிப்பு 3.]

அப்போது $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$ $\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa T$ $\mathbf{B}$ என்பது தளத்திற்குக் குத்தான நிலை வெக்டர். $\left[\frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau\mathbf{B}\right.$ எனும் ஃப்ரெனட் சூத்திரத்தில் $\tau = 0$ என்பதைப் பதிலிட வருகிறது].

வரையின் வளைவு: தளத்தில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு கோடு OX உடன் P-ல் உள்ள தொடுகோட்டு வெக்டர் $\mathbf{T}$, ψ



படம் 5.

கோண சாய்வில் உள்ளது என்போம். (s அதிகரிக்க, ψ அதிகரிக்கும்படி இருக்க வேண்டும்.)

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{d\psi}\frac{d\psi}{ds}$$

ஆனால் $\mathbf{T}$ அலகு வெக்டராதலால் $\frac{d\mathbf{T}}{d\psi} = \mathbf{N}$ (பக்கம் 17 குறிப்பு 1 பார்க்கவும்.)

$$\therefore \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \cdot\mathbf{N}\ \frac{d\phi}{ds} = \kappa\,\mathbf{N}$$

$$\therefore\ \kappa = \frac{d\phi}{ds} \text{ அல்லது } \rho = \frac{ds}{d\phi} \qquad \text{(i)}$$

[சமதள வரையில் ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து P எனும் புள்ளிக்குள்ள வில்லின் நீளம் ρ ஆகவும், P-ல் உள்ள தொடுகோடு, ஏதேனும் ஒரு நிலைக் கோட்டுடன் ϕ கோணச் சாய்விலும் இருந்து வரையின் சமன்பாடு $s=f(\phi)$ என்று தரப்பட்டால் அது வரையின் 'வில் திசைக் கூறுச் சமன்பாடு (intrnisic equation) எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக கயிற்று வளை (Catenary)யின் வில் திசைக் கூறுச் சமன்பாடு $s=c\tan\phi$.

உருள் வளை (Cycloid)யின் சமன்பாடு $s = 4\ c \tan\phi$ இவற்றின் வளைவு $\frac{d\phi}{ds}$ எனும் சூத்திரத்தால் தரப்படுகிறது.]

வளைவின் மற்ற இரு சூத்திரங்கள்

ஒரு சமதள வரையின் சமன்பாடு துணை அளவியில்

(i) $x = x(t) \quad y = y(t)$ எனத் தரப்பட்டால்

$$\mathbf{r} = [x, y, 0] \quad \dot{\mathbf{r}} = [\dot{x}, \dot{y}, 0]$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = [\ddot{x}\ \ddot{y}\ 0]$$

$$\therefore \ |\dot{\mathbf{r}}| = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = [0, 0, \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}]$$

$$\therefore |\dot{r} \times \ddot{\mathbf{r}}| = |\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|$$

$$\therefore\ \kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \ ; \rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{}^2)\,y^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}$$

(ii) $y = f(x)$ என நேரடியாகக் கார்டீசியக் கூறுகளில் தரப்பட்டால் இதை,

$x = t \quad y = f(t)$ என துணை அளவியில் கூறலாம்.

$$\therefore \quad \dot{x} = 1 \quad \dot{y} = f'(t) = f'(x) = y'$$

$$\ddot{x} = 0$$

இதே போல $\ddot{y} = y''$

$$\therefore \quad \kappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

1.15. கோணதூர உறுப்புகளில் வளைவின் சூத்திரம் (Curvature in Polar Coordinates)

$r = f(\theta)$ என்பது வரையின் சமன்பாடு ஆகுக. O என்பது ஆதியாகவும், $P(r, \theta)$ வரையில் புள்ளியுமாகுக. OP திசையில் அலகு வெக்டர் $\mathbf{R}$ ஆகுக. O–வுக்கு P–ன் நிலைவெக்டர் $\mathbf{r}$ என்றால், சமன்பாடு வெக்டரில் $\mathbf{r} = r\,\mathbf{R}(\theta)$ என எழுதலாம்.

$\frac{d\mathbf{R}}{d\theta}$ எனும் வெக்டர் $\mathbf{P}$ எனும் $\mathbf{R}$–க்குத்தான அலகு வெக்டராகும் [பக்கம் 17 குறிப்பு 1]

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,R + r\,\mathbf{P}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r)\,\mathbf{R} + 2\,\dot{r}\,\mathbf{P}$$

$$\therefore \; |\dot{\mathbf{r}}| = (r^2 + \dot{r}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\right| = \left|2\,\dot{r}^2 + r^2 - r\,\ddot{r}\right|$$

$$\therefore \text{ வளைவு } \kappa = \frac{\left|2\,\dot{r}^2 + r^2 - r\,\ddot{r}\right|}{(r^2 + \dot{r}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left|r^2 + 2\,\dot{r}^2 - r\,\ddot{r}\right|}{(r^2 + \dot{r}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2. சரிவு, பாய்வு, சுழல்

(Gradient, Divergence, Curl)

I சரிவு

2·1. தலப் பரப்புகள் அல்லது தலங்கள் (Surfaces)

முப்பரிமாண வெளியில் 'வரை' (curve) என புள்ளித் தொகுதியை ஆராய்ந்தோம், புள்ளிகளின் x, y, z கூறுகள் ஒரு துணை அளவி (t)-ன் சார்பலனுல், t மாறும்போது வரும் புள்ளித் தொகுதி வரை எனப்படும் என்று கூறினேம்.

புள்ளிகளின் x, y, z கூறுகள் ஒவ்வொன்றும் இரண்டு துணை அளவிகளின் (u, v என்போம்) சார்பலன்களானுல், அவற்றின் மதிப்புகள் மாறுந்தோறும் வரும் புள்ளித் தொகுதி தலப்பரப்பு அல்லது சுருக்கமாகத் தலம் (surfaces) எனப்படும்.

$x = x\ (u, v)\quad y = y\ (u, v)\quad z = z\ (u, v)$ எனும் சமன்பாடுகள் ஒரு தலத்தின் பொதுச் சமன்பாடாகும்.

[மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து இரண்டு மாறிகளை விடுவிக்க (eliminating) x, y, z-ல் ஒரு சமன்பாடு வரும். ஆகவே தலத்தை $f\ (x, y, z) = 0$ எனவோ அல்லது $z = f\,(x, y)$ எனவோ கூறலாம். இதைத் துணை அளவியில் கூற

$x = u\quad y = v\quad z = f\,(u, v)$ என மாற்றலாம்.]

$x = x\,(u,v)\ y = y\,(u,v)\ z = z\,(u,v)$ என்பதில் u, v மாறிகள். ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு இடைவெளியில் மாறலாம். $a \leq u \leq b$. $p \leq u < q$ என இடைவெளிகளைக் கூறலாம்.

ஒவ்வொரு புள்ளிக்குமென ஒரே திட்டமான u, v-ன் மதிப்பும், u, v, ஒரு மதிப்புக்கென ஒரே புள்ளியும் அமையும். இவற்றிற் கேற்பப் புள்ளிகள் அமையும் தலத்தின் பாகத்தைத் 'தலப்பிரதேசம்' (Region of the Surface) எனக்கூறலாம்.

[**சில குறியீடுகள்:** (i) $\frac{\partial x}{\partial u}$ என்பதை x_u எனக் குறிப்போம் என்றால் y_v என்பது $\frac{\partial y}{\partial v}$-யும் F_x என்பது $\frac{\partial F}{\partial X}$ என்ற பகுதி வகைக் கெழு (Partial derivative) வையும் குறிக்கும்.

(ii) $\frac{\partial (y, z)}{\partial (u\ v)}$ என்பது $\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}$ எனும் அணிக் கோவையைக் குறிக்கும்.]

2.2. தலத்தில் சாதாரணப் புள்ளிகள் (Regular points or ordinary points on the surface)

$x = x\ (u, v), \quad y = y\ (u, v), \quad z = z\ (u, v)$ என்பது தலத்தின் சமன்பாடாகுக.

$$A = \frac{\partial\ (y,\ z)}{\partial\ (u,\ v)} \quad B = \frac{\partial\ (z, x)}{\partial\ (u, v)} \quad C = \frac{(\partial\ x,\ y)}{\partial\ (u,\ v)}$$

ஆகுக. u, v-ன் எந்த மதிப்புக்கு A, B, C மூன்றில் ஒன்றாவது பூச்சியமல்லாது இருக்கிறதோ, அத்தகைய மதிப்புகள் தரும் தலத்தின் புள்ளி சாதாரண புள்ளி எனப்படும்.

அதாவது $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ என்ற அணி இரண்டாவது படியாக (Rank two) இருக்கவேண்டும். மூன்றும் பூச்சியமாகும் புள்ளி சிறப்புப் புள்ளிகள் அல்லது தனிப் புள்ளிகள் (Singular points) எனப்படும்.

2.3. தலத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு: தலத்தின் சமன் பாட்டைக் கார்டீசியின் கூறுகளின் இரண்டு துணை அளவிகளின் மூன்று சமன்பாடுகளாகக் கூறுவதைத் தொகுத்து ஒரு வெக்டர் சமன்பாடாகக் கூறலாம்.

$\mathbf{r} = \mathbf{r}\ (u, v)$ என்பது தலத்தின் வெக்டர் சமன்பாடாகும்.

$\mathbf{r}=\mathbf{r}\,(a, v)$ என்பதில் a மாறிலி எண் ஆனால், ஒரே துணை அளவி v மட்டும் உள்ளது. அப்போது இந்தச் சமன்பாடு, மேற் சொன்ன தலத்தில் அமையும் ஒரு வரையை(curve)க் குறிக்கும்.

இது போன்று $\mathbf{r}=\mathbf{r}\,(u,v)$ என்பது தலத்தில் அமையும் மற்றொரு வரையைக் குறிக்கும்.

இவை $u=a$, $v=b$ தரும் புள்ளி வழி [$x=x\,(a,b)$, $y=y\,(a,b)$, $z=z\,(a,b)$ என்னும் புள்ளி]ச் செல்லும் இரு வரைகளாகும். இவற்றைத் தலத்தில் $u=a$, $v=b$ தரும் புள்ளி வழிச் செல்லும் துணை அளவி வரைகள் (Parametric curve) எனப்படும்.

இவற்றின் தொடு கோட்டு வெக்டர்கள் $\mathbf{r}u$, $\mathbf{r}v$ ஆகும். சாதாரணப் புள்ளியில் $\mathbf{r}u\times\mathbf{r}v\neq 0$. ஆகவே, தொடு கோடுகள் இணையல்ல. ஆகவே $\mathbf{r}u\times\mathbf{r}v$ எனும் செங்கேட்டு வெக்டரைத் தரும். தலத்தில் ஒவ்வொரு சாதாரணப் புள்ளியிலும் ஒரே ஒரு செங்கோடு (normal) உள்ளது எனக் காண்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு : $x=a\sin u\cos v$

$y=a\sin u\sin v$

$z=a\cos v$

எனும் சமன்பாடுகள் $x^2+y^2+z^2=a^2$ எனும் கோளப் பரப்பைத் தருகிறது.

$u=\theta$, $v=\phi$ என்பவை முறையே அட்ச ரேகைகளையும், நெடுங் கோடுகள் அல்லது தீர்க்க ரேகைகளையும் தருகின்றன.

$\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$ என்பதைக் கீழ்வரும் அணியிலிருந்து காணலாம். அதாவது.

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\cos u\cos v, & a\cos u\sin v, & -a\sin u \\ -a\sin u\sin v & a\sin u\cos v & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore\quad \mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=a^2\sin u\;[\cos u\;\sin v,\;\sin u,\;\sin v,\;\cos v\,]$
இந்த வெக்டர் (u, v)க்குள்ள ஆரதிசை என்பதைக் காணலாம்; அதாவது கோளப் பரப்பின் செங்கோடு என்பது புலனாகிறது. [$u=0$, $v=0$ எனும்போது $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=0$ என்றாலும், இங்கும் செங்கோடு துருவத்திற்குள்ள ஆரம் என அறியலாம்.]

2.4. சரிவு (Gradient)

தலத்தின் சமன்பாட்டை $F(x, y, z) = 0$ எனவும் கூறலாம் என்று கண்டோம்.

(1) $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ எனும் (t) ன் சார்பலன்கள் (t)-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும்–எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் (identically) — $F(x, y, z) = 0$ எனும் சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்தட்டும். அப்போது இந்த மூன்று சமன்பாடுகள் $P(t)$ எனும் புள்ளி வழி முற்றிலும் தலத்தில் அமையும் வரையைத் தரும் பிரதியிட்டு 't' ஐச் சார்ந்த வகைக் கெழுகாண.

(2) $F_x x_t + F_y y_t + F_z z_t = 0$ என வருகிறது.

$\left[F_x = \frac{\partial F}{\partial x}\right.$; $xt = \frac{dx}{dt}$ இது போன்று ஏனையவையும்.] ஆனால், $(x_t\ y_t\ z_t)$ மேற்கூறிய வரைக்கு $P(t)$ எனும் புள்ளியில் உள்ள தொடுகோட்டு வெக்டராகும்.

(2) ஆவது சமன்பாட்டை

$$(F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \cdot (x_t \mathbf{i} + y_t \mathbf{j} + z_t \mathbf{k}) = 0$$

என எழுதலாம்.

$\therefore$ $(F_x\ F_y\ F_z)$ எனும் வெக்டர் $(x_t, y_t\ z_t)$ எனும் வெக்டருக்குக் குத்தாகும். இவ்வாறு (F_x, F_y, F_z) எனும் வெக்டர் $P(t)$ எனும் புள்ளி வழி தலத்தில் அமையும் **எல்லா** வரைகளுக்கும் குத்தாகும். **அதாவது இந்**த வெக்டர் $F(x, y, z) = 0$ தரும் தலத்திற்கே செங்கோடு ஆகும்.

$F(x, y, z) = C$ எனும் சமன் பாட்டில் C மாற பலவேறு தலங்கள் வருகின்றன. இவை யாவற்றிற்கும் $[Fx\ Fy\ Fz]$ செங்கோடாகிறது}.

(Fx, Fy, Fz) எனும் வெக்டரை அதாவது,

$$\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}$$ எனும் வெக்டரை ∇F எனக் குறிப்பது வழக்கம். (∇ என்பதை டெல் என வாசிக்கவும்.)

இதை $\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) F$ எனவும் எழுதலாம்.

அப்போது $\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$ என்பது ஒரு செயலி யாகும். [$\frac{d}{dx}$ என்பதைச் செயலி என்று இதை D எனவும் குறிக்கலாம் என்பதைச் சாதாரண நுண்கணிதத்தில் வாசித்திருக்கலாம்.]

∇F **எனும் வெக்டர்** $F(x, y, z)$-**ன் சரிவு** (Gradient) **எனப்படும்.** இதைச் 'சரிவு F' என வாசிக்கவும்.

2.5 தலத்தின் தொடுதளச் சமன்பாடு (Equation of Tangent Plane to a surface)

$F(x, y, z)=0$ என்பது தளத்தின் சமன்பாடாகுக.

$R_0\,(x_0\,y_0\,z_0)$ அதில் ஒரு புள்ளியாகுக. அதன் நிலை வெக்டர் $\mathbf{r}_0$ எனலாம் $(\mathbf{r}_0=x_0\,\mathbf{i}+y_0\,\mathbf{j}+z_0\,\mathbf{k})$. $P\,(x, y, z)$ தொடுதளத்தில் ஏதேனும் புள்ளியாகுக. அதன் நிலை வெக்டர் $\mathbf{r}$ எனலாம். $(\mathbf{r}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k})$. ΔF **என்பது** R_0 **ல் செங்கோடு;** $\mathrm{R_0P}$ எனும் வெக்டருக்குக் குத்தாகும் (P-ன் எல்லா நிலைகட்கும்).

$\therefore\ (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot(\nabla F)_0=0$ என்பது தொடுதளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடாகிறது.

இது $(x-x_0)\,(F_x)_0+(y-y_0)\,(F_y)_0+(z-z_0)\,(F_z)_0=0$ எனவாகிறது.

எடுத்துக்காட்டு : $F(x, y, z)\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ என்றால் $(x_0\,y_0\,z_0)$-ல் தொடுதளம்,

$$(x-x_0)\left(\frac{2\,x_0}{a^2}\right)+(y-y_0)\left(\frac{2\,y_0}{b^2}\right)+(z-z_0)\left(\frac{2\,z_0}{c^2}\right)=0$$

$$\frac{x\,x_0}{a^2}+\frac{y\,y_0}{b^2}+\frac{z\,z_0}{c^2}=\frac{x_0^{\,2}}{a^2}+\frac{y_0^{\,2}}{a^2}+\frac{z_0^{\,2}}{c^2}$$

$$=1$$

F, g என்பவை x, y, z-ல் இரு சார்பலன்களானல்

(i) $\nabla (F+\mathbf{g}) = \nabla F + \nabla \mathbf{g}$

(ii) $\nabla F\mathbf{g} = F\nabla \mathbf{g} + \mathbf{g}\nabla F$.

(iii) $\nabla \left(\frac{F}{\mathbf{g}}\right) = \frac{\mathbf{g}\nabla F - F\nabla \mathbf{g}}{\mathbf{g}^2} (\mathbf{g} \neq 0)$.

தீர்வு

(i) $\nabla (F+\mathbf{g}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(F+\mathbf{g})$

$$= i\frac{\partial (F+\mathbf{g})}{\partial x} + j\frac{\partial (F+\mathbf{g})}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial (F+\mathbf{g})}{\partial z}$$

$$= i\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}$$

$$+ \mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial y} + j\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}$$

$$+ \mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial z} + \mathbf{k}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z}$$

$$= \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)F$$

$$+ \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{g}$$

$$= \underline{\triangle F + \nabla \mathbf{g}}$$

(ii) $\triangle (F\mathbf{g}) = \left(\bar{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathrm{F}\,\mathbf{g})$

$$= i\frac{\partial (F\mathbf{g})}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial (F\mathbf{g})}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial (F\mathbf{g})}{\partial z}$$

$$= \mathbf{i}\left[F\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} + \mathbf{g}\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \mathbf{j}\left(F\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} + \mathbf{g}\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial z}\right)$$

$$+ \mathbf{k}\left(F\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} + \mathbf{g}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= F\left(\mathbf{i}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial y}{\partial z}\right)$$

$$+ \mathbf{g}\left(\mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

$$\therefore \quad \nabla(F\mathbf{g}) = F\nabla\mathbf{g} + \mathbf{g}\nabla F$$

(iii) $$\nabla\left(\frac{F}{\mathbf{g}}\right) = i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F}{\mathbf{g}}\right) + j\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F}{\mathbf{g}}\right) + \mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{F}{\mathbf{g}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F}{\mathbf{g}}\right) = \frac{\mathbf{g}\frac{\partial F}{\partial x} - F\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}}{\mathbf{g}^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F}{\mathbf{g}}\right) = \frac{\mathbf{g}\frac{\partial F}{\partial y} - F\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}}{\mathbf{g}^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{F}{\mathbf{g}}\right) = \frac{\mathbf{g}\frac{\partial F}{\partial z} - F\frac{\partial g}{\partial z}}{\mathbf{g}^2}$$

இவற்றை வலது பக்கத்தில் பிரதியிட்டுச் சுருக்க.

$$\therefore \quad \nabla\left(\frac{F}{\mathbf{g}}\right) = \frac{1}{\mathbf{g}^2}\left\{\mathbf{g}\left(i\frac{\partial F}{\partial x} + j\frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right.$$

$$\left. - F\left(i\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} + j\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} + \mathbf{k}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z}\right)\right.$$

$$= \frac{1}{g2}\left\{\mathbf{g}\nabla F - F\nabla\mathbf{g}\right\} = \frac{\mathbf{g}\nabla F - F\nabla\mathbf{g}}{\mathbf{g}^2}$$

2.6. புள்ளிச்சார் பலன் (Point function)

பொருள் தொகுதிகளின் சில பண்புகள், அத் தொகுதியின் இடத்திற்கு இடம் மாறுபடும். சூடு பெறும் ஒரு பொருள் தொகுதியில் வெப்ப நிலை அத்தொகுதியில் இடத்திற்கு இடம் மாறுபடும் இடத்தைப் புள்ளி எனலாம். ஆகவே, வெப்ப நிலை புள்ளிச்சார் பலன் என்று கூறலாம். வெப்ப நிலை அளவு (Temperature) திசையிலியாகும். ஆகவே வெப்ப நிலை **திசையிலிப் புள்ளிச்சார் பலன்** (scalar point function) எனக் கூறலாம். இது போன்று நிலையாக இருக்கும் நீர்த் தொகுதியில் அழுத்தமும் (pressure) திசையிலிப் புள்ளிச்சார் பலனாகும். இதே போல வளி மண்டலத்திலும் அழுத்தம் திசையிலிச் சார் பலனாகும்.

இயங்கும் நீர்த் தொகுதியில் நீரின் ஓட்ட வேகம் திசையும் அளவும் உடையதாகும், நீர் மண்டலத்தில் ஒவ்வோரிடத்தில் ஒவ்வொரு விதமாக ஓட்ட வேகம் (flow velocity) இருக்கும். இது வெக்டர் புள்ளிச்சார் பலன் (Vector point function) எனப்படும்.

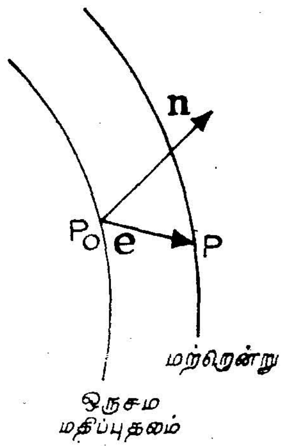
சம மதிப்புத் தலங்கள்: (Level surfaces): முதலில் திசையிலிப் புள்ளிச் சார் பலனை ஆராய்வோம். புள்ளியின் கார்டீசியக் கூறுகள் (x,y,z) என்றால் $\phi(x,y,z)$ என (x,y,z)-ல் உள்ள மதிப்பைக் கூறுவோம்.

ஒரே மதிப்புடைய புள்ளித் தொகுதிகளின்—அதாவது மதிப்பு c_1 என்பதையுடைய புள்ளிகளின்—கூறுகள் $\phi(x,y,z)=c_1$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு ஒத்ததாகும். ஆனால் இதுவோ ஒரு தலத்தைக் காட்டுகிறது. இத்தலம் 'சம மதிப்புத் தலம்' (Level surface) எனப்படும். இதே போல $\phi(x,y,z)=c_2$ என்பது இன்னொரு சம மதிப்புத் தலத்தை தரும். இத்தகைய சம தலப் பரப்புத் தலங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டாது. ஏனெனில், அவை வெட்டினால் இரண்டு தலத்திற்கும் பொதுவான புள்ளிகள் இருக்கும். அப்போது பொதுப் புள்ளியில் இரண்டு மதிப்புகள் வருகின்றன. ஆனால் ஒரு புள்ளிக்கு ஒரு மதிப்புதான் இருக்க முடியும். [ஒரு புள்ளியில் ஒரு வெப்ப நிலைதான் காண முடியும் அல்லது ஒரு அழுத்த மதிப்புதான் உள்ளது.] இதிலிருந்து இரண்டு சம மதிப்புத் தலங்களுக்கு ஒரு பொதுப் புள்ளியேனும் இருக்க முடியாது என்பது புலனாகிறது.

2.7. திசை வகைக்கெழு (Directional derivative)

ஒரு 'மண்டலத்தில் (Region) ஒரு புள்ளிக்கு ஒரே மதிப்பு என உள்ள திசையிலிப் புள்ளிச் சார் பலன் $f(x, y, z)$ ஆகுக. P_o என்ற புள்ளியின் கார்டீசியக் கூறுகள் (x_o, y_o, z_o) எனின் $f(x,y,z)$-ன் அலகு மதிப்பு $f(x_o y_o z_o.)$ அந்தப் புள்ளி வழி **e** எனும் அலகு வெக்டர் திசையில் P_oP எனும் நேர்கோட்டைக் கொள்வோம். நேர் கோட்டின் திசைக் கோசைன்கள் $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ஆனால் $\mathbf{e} = i\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$ அல்லது இதை $(\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma)$ எனவும் குறிக்கலாம்.

$\therefore$ $\mathbf{P}_o$-ன் நிலை வெக்டர் $\mathbf{r}_o$ ஆனால் கோட்டின் சமன்பாடு $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + s\mathbf{e}$. இங்கு $s = |\mathbf{P}_o\mathbf{P}_o| > 0$. ஆகவே துணை அளவியில் இதைக் கூற $x = x_s + s\cos\alpha$ $y = y_o + s\cos\beta$ $z = z_o + s\cos\gamma$ எனவரும். ஆகவே இந்தக் கோட்டின் மீதுள்ள புள்ளிகளில் (x, y, z)-ன் மதிப்பு sஐ மட்டும் சார்ந்ததாகும்.



$f(x, y, z)$-ன் s ஐச் சார்ந்த வகைக்கெழு

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

ஆகும்.

[என சாதாரண நுண் கணிதம் பயன்படுத்தப்படுகிறது].

ஆனால் $x = x_o + s\cos\alpha$ முதலியவற்றிலிருந்து

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma$$ என வருகிறது.

$$\therefore \quad \frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial v}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

$\left[\frac{ds}{ds} = f_x \cos\alpha + f_y \cos\beta + f_z \cos\gamma\right.$ எனவும் எழுதலாம்.]

இவைப் பொதுச் சமன்பாடு. ஆனால் f_x, f_y, f_z-ன் மதிப்புகள் (x_o, y_o, z_o) எனும் புள்ளியில் உள்ளவை எனக்

கொண்டால், அப்போது $\frac{df}{ds}$ மதிப்பு P_0 எனும் புள்ளியில் e வெக்டர் திசையில் உள்ள **திசை வகைக்கெழு** (Directional Derivatives) எனப்படும்.

$\cos \alpha = \mathbf{e}\,\mathbf{i} \cos \beta = \mathbf{e}\,\mathbf{j} \cos \gamma = \mathbf{e}\,\mathbf{k}$ ஆனதால்

$$\frac{df}{ds} = f_x\, \mathbf{e}\,\mathbf{i} + f_y\, \mathbf{e}\,\mathbf{i} + f_z\, \mathbf{e}\,\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{e} \cdot (\mathbf{i} f_x + \mathbf{j} f_y + \mathbf{k} f_z)$$

$$= \mathbf{e} \cdot \left(i \frac{\partial t}{\partial x} + j \frac{\partial t}{\partial x} + \bar{n} \frac{\partial t}{\partial z} \right)$$

$$\frac{df}{ds} = \mathbf{e} \cdot \nabla f = |\nabla f| \cos (\nabla f, \mathbf{e})$$

ஆகவே $f\ (x, y, z)$-ன் சரிவின் e திசையில் உள்ள பிரிவு (Component in direction of e) $f\,(x, y, z)$-ன் திசை வகைக்கெழு ஆகிறது.

குறிப்பு 1: ∇f என்பது தலத்திற்குக் குத்து வெக்டர் என்பதைக் கண்டோம். $\mathbf{e} \perp^r \nabla f$ ஆகும்போது $\frac{df}{ds} = 0$ ஆகிறது. ஆனல் இப்போது தொடு கோட்டு வெக்டராகும். அதாவது புள்ளி தலத்தில் மாறும்போது 'f' மாறுவதில்லை என்பதை உறுதியாக்குகிறது.

குறிப்பு 2: $\frac{df}{ds}$-ன் அதிகபட்ச மதிப்பு ∇f-ன் திசையும் e-ன் திசையும் ஒன்றுகும்போது வருகிறது. [∇f, e இடையே உள்ள கோணம் 0 ஆனதால்] அதாவது e என்பது அலகுச் செங்கோடு **n** ஆகும்.

∴ திசை வகைக் கெழுவின் அதிகபட்ச மதிப்பு

$$|\nabla f| = \mathbf{n} \cdot \nabla f \left(= \frac{df}{dn} \right) \text{ ஆகும்.}$$

இதைச் செங்கோட்டு வகைக் கெழு (normal derivative) என்பர்.

$$\therefore \quad \nabla f = \mathbf{n}\frac{df}{dn} \text{ ஆகிறது.}$$

ஆகவே தலத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் சரிவு Δf புள்ளி குறிப்பிடப்படும் கார்டீசிய உறுப்புக்களைச் சார்ந்ததல்ல. தலத்தை மட்டும் பொருத்தது. **ஆதியை மாற்றினாலும் அச்சுக்களை மாற்றினாலும் இரண்டையும் மாற்றினாலும்** ∇f **மாறாக் கணியமாக** (Invariant under transformation of coordinates) **விளங்குகிறது.**

2.8. $|\nabla f|$ **ம் மாறாக் கணியமே.**

ஏனெனில் $\nabla x = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) x = \mathbf{i}$

இதே போல $\nabla y = \mathbf{j} \qquad \nabla z = \mathbf{k}$

$$\therefore \quad \nabla f = i\frac{\partial t}{\partial x} + j\frac{\partial t}{\partial y} + k\frac{\partial t}{\partial z}$$

$$= \nabla x\frac{\partial t}{\partial x} = \nabla y\frac{\partial t}{\partial y} + \nabla z\frac{\partial t}{\partial z}$$

∴ எத்தகைய குத்தச்சுகளைக் கொண்டு புள்ளிகளின் கார்டீசியக் கூறுகளைக் சொன்னாலும்; (∇x, ∇y, ∇z மாறாக் கணியங்களாவதால்) $|\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2 + f_z^2$ என்பதுவும் மாறாக்கணியமே.

$f = f(v_1\, v_2 \ldots v_n)$ **என்பதில்** $v_1\, v_2 \ldots v_n$ **என்பவை** (x, y, z)**ன் சார்பலன்களானால்**

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial v_1}\nabla v_1 + \frac{\partial t}{\partial v_2}\nabla v_2 \ldots \frac{\partial t}{\partial v_n}\nabla v_n$$

நிரூபணம்: $\dfrac{df}{ds} = \dfrac{\partial f}{\partial v_1}\dfrac{dv_1}{ds} + \dfrac{\partial t}{\partial v_2}\dfrac{dv_2}{ds} \cdots \dfrac{\partial t}{\partial v_n}\dfrac{dv_n}{ds}$

ஆனல் $\frac{df}{ds} = \mathbf{e} \cdot \nabla f$

$$\therefore \frac{d v_1}{ds} = \mathbf{e} \cdot \nabla v_1 \quad \frac{d v_2}{ds} = \mathbf{e} \cdot \nabla v_2 \quad \frac{d v_n}{ds} = \mathbf{e} \cdot \nabla v_n$$

$$\mathbf{e} \cdot \nabla f = \mathbf{e} \cdot \left[\nabla v_1 \frac{\partial t}{\partial v_1} + \nabla v_2 \frac{\partial t}{\partial v_2} - \nabla v_n \frac{\partial t}{\partial v_n} \right]$$

e-ன் எல்லாத் திசைகளுக்கும் இது பொருந்துமாதலால்,

$$\underline{\underline{\nabla f = \nabla v_1 \frac{\partial t}{\partial v_1} + \nabla v_2 \frac{\partial t}{\partial v_2} + \nabla \ldots v_n \frac{\partial t}{\partial v_n}}}$$

குறிப்பு 1: (x, y, x) எனும் கூறுகளை u, v, w எனும் வளை வரைக் கூறுகளாக மாற்ற $f(x, y, z)$ எனும் சார்பலன் $F(u, v, w)$ என மாறட்டும்.

$$\therefore \quad \nabla F(u) = \nabla u F_x + \nabla u F_y + \nabla u F_z.$$

குறிப்பு 2: $f(x, y, z)$ என்பதை, புள்ளியின் ஆதியிலிருந்துள்ள தூரம் n-ன் சார்பலனுகக் கூற, அது $F(r)$ ஆகுக.

அப்போது $\nabla F(r) = \frac{dF}{ds} \nabla r; \; r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\nabla r = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1. \quad 2x}{2 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{r}$$

இதேபோல $\frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{r}$

$$\frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{z}{r}$$

$$\therefore \nabla r = \frac{\mathbf{i} x + \mathbf{j} y + \mathbf{r} z}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\therefore \quad \boxed{\nabla F(r) = \frac{dF}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r}}$$

[∇r என்பது கார்டீசிய உறுப்புக்களைக் கூறுமல் $\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}}$ எனக் காணலாம். $r = c$ என்பது r ஆரமுள்ள கோளத்தைத் தரும். ஆனல் $\nabla f = \mathbf{n} \cdot \frac{dt}{dn}$ எனும் செங்கோட்டு வகைக்கெழு எனக் கூறினேம் (பார்க்கவும்...)

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \frac{df}{dn} = 1 \quad \therefore \quad \nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}]$$

2.9 தளக்கோண தூரக் கூறுகளில் சரிவு : (Gradient in plane polar coordinates)

$f(r, \theta)$ என்பது r, θ எனும் கூறுகளில் சார் பலனுருக. $f(r, \theta)$-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் சம மதிப்பு வரைகள் (Contours) வரும்.

$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{R}$ எனும் அலகு வெக்டர் ($\overrightarrow{OP}$ திசையில்)

$\theta = c$ என்பது c-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் ஆதி வழி ஒவ்வொரு கோடாகும். அதாவது OP திசைக் கோடாகும்.

$\nabla f = \mathbf{n}\frac{df}{dn}$ எனும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $\nabla\theta$ காண்போம். $\mathbf{n}$ என்பது $\mathbf{R}$-க்குத் தான அலகு வெக்டர் $\mathbf{P}$. d என்பது குத்து திசையில் நுண்ணிய வில் $r\,d\theta$.

$$\therefore \quad \frac{df}{dn} = \frac{d\theta}{r\,d\theta} \quad [\text{இங்கு } f = \theta]$$

$$\therefore \quad \nabla\theta = \mathbf{P} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\mathbf{P}}{r}$$

$f(r, \theta) = c$ எனும் வரைக்கு ஒரு புள்ளி (r_0, θ_0) செங்கோட்டு திசை,

$$\nabla f(r, \theta) = \nabla r f_r + \nabla\theta f_\theta$$

$$= \mathbf{R} f_r + \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{r}} f_\theta$$

[திசையிலிச் சார்பலனின் 'சரிவு' என்ன என்பதை மட்டும்—அதாவது ∇f என்பதைக்—கூறினோம். வெக்டர் சார் பலனுன் சரிவைக் கூறவில்லை, கூறவும் போவதில்லை என்பதைக் கவனிக்கவும்.]

கணக்கு 1.

$\phi(x, y, z) = 3xy^2 - y^3z^3$ என்றால், $(1, 1, -2)$ என்ற புள்ளியில் $\Delta\phi$ காண்க.

$$\Delta\phi = i\frac{\partial\varphi}{\partial x} + j\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3y^2 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = xy - 2yz^2 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}\ 3y^2z^2$$

$x = 1, \quad y = 1, \quad z = -2$ எனப் பிரதியிட

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 6 - 8 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 12$$
$$= -2$$

$\therefore$ $(1, 1, -2)$ என்ற புள்ளியில் $\nabla\varphi = 3\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 12\,\mathbf{k}$

கணக்கு 2.

(a) $\phi = \log|\mathbf{r}|$ (b) $\varphi = \frac{1}{r}$ (c) $\varphi = r^n$ என்றால் $\nabla\varphi$-ஐக் காண்க.

$$\nabla\varphi = \frac{d\varphi}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r} \quad \phi = \log r \quad \therefore \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r}$$

$$\therefore \nabla\varphi = \frac{\mathbf{r}}{r^2}$$

(b) $\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{r^2} \quad \Delta\varphi = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$

(c) $\frac{d\varphi}{dr} = nr^{n-1} \quad \therefore \nabla y = nr^{n-1}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} = nr^{n-2}\,\mathbf{r}$

கணக்கு 3 :

$$r = a\,(1 - \cos), \quad r = b\,(1 + \cos\varphi)$$

எனும் நெஞ்சு வளைகள் ஒன்றையொன்று குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும் எனக் காண்க.

தீர்வு : $f(r, \theta) = c$ எனும் வரைக்கு

$$\Delta f\ (r, \theta) = f, \ \mathbf{R} + \frac{f\theta}{r}\mathbf{P}$$ எனக் கண்டோம்.

$r - a\,(1 - \cos\theta) = 0$ என்றதில் $f\,r = 1 \quad f\varphi = -a\sin\varphi$

∴ முதல் வரையின் செங்கோடு

$$\mathbf{R} - \frac{a\sin\varphi}{r}\mathbf{P} = \mathbf{r} - \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi}\mathbf{P}$$

இரண்டாவது வரையின் செங்கோடு $\mathbf{R} + \frac{b\sin\varphi}{r}\mathbf{P}$

$$= \mathbf{R} + \frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi}\mathbf{P}$$

இவற்றின் புள்ளிப் பெருக்கள் $= 1\ \frac{\sin^2\varphi}{1 - \cos^2\varphi}$

$$= 1 - 1$$

$$= 0$$

∴ இரண்டு செங்கோடு குத்தாகும்.

∴ இரண்டு தொடு கோடுகளும் குத்தாகும்.

∴ இரு வரைகளும் ஒன்றற்கொன்று குத்தாகும்.

கணக்கு 4 :

$f(r_1 r_2) = c$ என இரு துருவக் கூறுகளில் (Bipolar Coordinates) கூறப்படும் வரைக்கு $f_{r1}\,\mathbf{R}_1 + f_{r2}\,\mathbf{R}_2$ எனும் வெக்டருக்கு இணையான செங்கோடு ஒன்று உள்ளதெனக் காண்க.

[A, B எனும் புள்ளிகளிலிருந்து P எனும் புள்ளியின் தூரங்கள் r_1, r_2 என்றால் அவை P-ன் இருதூரக் கூறுகள் எனப்படும். $\overrightarrow{AP}$ திசையில் அலகு வெக்டர் $\mathbf{R}_1$, $\overrightarrow{BP}$ திசையில் அலகு வெக்டர் $\mathbf{R}_2$. A, B எனும் புள்ளிகள் முனைகள் (Poles) எனப்படும்.]

$$\Delta f(r_1, r_2) = f_{r1} \nabla r_1 + f_{r2} \nabla r_2$$

ஆனால் $\nabla r = \mathbf{R}$ என்பது போன்று

$$\nabla r_1 = \mathbf{R}_1 \qquad \nabla r_2 = \mathbf{R}_2$$

$$\therefore \quad \nabla f(r_1 r_2) = f_{r_1} \mathbf{R}_1 + f_{r2} \mathbf{R}_2$$

இது செங்கோட்டுத் திசையைக் குறிக்கிறது. ஆகவே இத் திசையில் செங்கோடு உள்ளது.

குறிப்பு 1:

$r_1 + r_2 = 2a$ அல்லது $r_1 + r_2 - 2a = 0$ என்பது குவியங்களை AB ஆகக் கொண்டு — அதாவது முனைகளாகக் கொண்டு— $2a$ நெட்டச்சு நீளமுள்ள நீள்வட்டம் (ellipse) ஆகும்.

$$f(r_1 r_2) = r_1 + r_2 - 2a$$

$$\therefore \quad f_{r_1} = 1 \quad f_{r_2} = 1$$

$\therefore$ செங்கோட்டுத் திசை $\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$ (மேல் கணக்கில் பிரதியிட) அதாவது S, S' குவியங்களாகவும் P என்பது புள்ளியுமாய் SP திசையில் $\mathbf{R}_1$ அலகு வெக்டர் $S'P$ திசையில் $\mathbf{R}_2$ அலகு வெக்டர். செங்கோட்டு திசை $\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$-ன் திசை. அதாவது SPS' எனும் கோணத்தை இரு சமக் கூறிடுகிறது — இரு சம வெட்டியாகிறது.

குறிப்பு 2 :

$r_1 + r_2 = c$ என்பது நீள்வட்டம்

$r_1 - r_2 = c$ அதே குவியங்களுள்ள அதிபரவளை.

முதல் வரையின் செங்கோட்டு திசை $\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$

இரண்டாவதின் செங்கோட்டு திசை $\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$

இவற்றின் புள்ளிப் பெருக்கற் பலன் $= |R_1|^2 - |R_2|^2$

$$= 1 - 1 = 0$$

ஆகவே ஒன்றற்கொன்று குத்தாகும்.

பயிற்சி

1. $\mathbf{r}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$ என்றால், $|\mathbf{r}|=r$ என்றால்

$\nabla r^n = nr^{n-2}\,\mathbf{r}$ எனக் காண்க.

2. $\phi(x,y,z) = 3x^2y-y^3z^2$ என்றால், $\nabla\phi$-ன் மதிப்பை $(1,-2,-1)$ எனும் புள்ளியில் காண்க.

3. $\{\nabla f(r)\} \times \mathbf{r} = 0$ எனக் காண்க.

4. $\nabla\, e^{(x^2+y^2+z^2)}$ஐக் கணக்கிடுக.

5. $V=r\cos\theta + \tan\theta$ எனக் கோண தூர உறுப்புகளில் கூறப்படுகிறது.

∇V ஐ அதே உறுப்புகளில் காண்க.

6. $z=x^2+y^2$ எனும் வளை தலப் பரப்பிற்கு $(1,2,5)$ என்ற புள்ளியில் உள்ள அலகுச் செங்கோட்டைக் காண்க.

$$\left(\text{விடை : } \frac{2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{21}}\right)$$

7. $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2 = 9$ எனும் பரப்பிற்கு $(3, 1, -4)$ எனும் புள்ளியில் உள்ள அலகுச் செங்கோட்டைக் காண்க.

$$\text{விடை } \left(\frac{2\,\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\,\mathbf{k}}{3}\right)$$

8. $z=x^2+y^2$ எனும் பரப்பிற்கு $(2,-1,3)$ எனும் புள்ளியில் உள்ள தொடு தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

9. $\phi=4xz^3-3x^2y^2z$ என்பதற்கு $(2,-1,2)$ என்ற புள்ளியில் $(2\,i-3\,j+6\,\mathbf{k})$ எனும் திசையில் திசை வகைக்கெழு காணவும்.

2.10. வெக்டரின் பாய்வும் சுழலும். (Divergence and curl of a vector)

திசையிலிச் சார்பலன் f (x,y,z)-ன் 'சரிவு என்பது ∇f என்றும், ∇ என்பது ஒரு செயலி என்றும் $\left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$ என்பதாகும் எனவும் சென்ற பிரிவில் கூறினோம். $\frac{d}{dx}$, $\frac{\partial}{\partial x}$ என்பவை சாதாரண நுண்கணிதத்தில் திசையிலிச் சார் பலன்கள் மேல் செயல்படும் வகைக் கெழுச் செயலிகள் (Differential operator) எனவும், இவற்றை Δ, Δx எனவும் குறிக்கலாம் என்று அங்குக் கூறப்படுகிறது. இங்கு ∇ என்பது இரு வகைப் பண்புகளுடையது. வெக்டர் பண்பும், வகைக் கெழுக் செயிலியின் பண்பும் ஒருங்கே கொண்டது. திசையிலிச் சார்பலனின்மீது செயல்படும்போது வெக்டர் சார் பலனைத் தருகிறது. இது வெக்டர் சார்பலனின் மீதும் செயல் படலாம். **F** என்பது வெக்டர் சார் பலனுனல் [அதாவது வெக்டர் புள்ளிச் சார் பலனுனல் (Vector point function)] $\nabla\cdot\mathbf{F}$, $\nabla\times\mathbf{F}$ என இரு வகையாகச் செயல் படலாம். [∇ **F** எனவும் செயல் படலாம். இது வெக்டர் சார்பலனின் சரிவு எனப்படும். இதை இப்போது இங்கே கூறவில்லை].

$\nabla\cdot\mathbf{F}$ என்பது **F** எனும் வெக்டரின் **பாய்வு** (divergence) எனப்படும். இதை "டெல் புள்ளி **F**" எனவோ 'div *F*' எனவோ வாசிக்கலாம். சில இடங்களில் ∇ **F** என்பதை div **F** எனவும் எழுதுவோம்.

$\nabla\times\mathbf{F}$ என்பது **F**-ன் சுழல் (curl) எனப்படும். இதைக் curl **F** எனவோ, rot **F** (rot என்பது rotation என்பதன் சுருக்கம்) எனவோ எழுதுவார்கள்.

2.11. வெக்டர் புள்ளிச் சார் பலனின் பாய்வு

$F(x,y,z)$ என்பது (x,y,z)-ல் உள்ள ஒரு வெக்டர் புள்ளிச் சார்பலனுகுக. [முன்னர்க் கூறியதுபோல, ஓர் இயங்கு நீர் மண்டலத்தில் ஒரு புள்ளியில் நீரோட்டத்தின் திசை - வேகம் வெக்டராகும். அது இடத்தைச் சார்ந்ததாகும். அதாவது இடத்தைத் தருகின்ற கார்டீசியக் கூறுகள் x,y,z-ன் சார் பலனுகும்]. x,y,z அச்சுகளின் திசைகள் **i, j, k** அலகு

$F_x F_y F_z$ என்பவை $F(x, y, z)$-ன் இத் திசைகளில் உள்ள பிரிவுகள் (components) ஆகுக. $\left(F_x\right.$ இங்கு $\frac{\partial F}{\partial x}$ அல்ல.$\left.\right)$

$$\text{அப்போது } \nabla.\mathbf{F} = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right).\mathbf{F}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} i. + \frac{\partial}{\partial y} j. + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \Big) \mathbf{F}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(i.\mathbf{F}) + \frac{\partial}{\partial y} + (\mathbf{j}.\ \mathbf{F}) \times \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k}.\ \mathbf{F})$$

ஆனல், $\mathbf{F}=\mathbf{i}\ Fx+\mathbf{j}\ Fy+\mathbf{k}\ Fz$

$$\therefore\ i.\mathbf{F}=F_x \quad \mathbf{j}.\mathbf{F}=F_y\ \mathbf{k}.\mathbf{F}=F_z.$$

$$\therefore\ \nabla\ \mathbf{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

மீண்டும் கூற,

$$\nabla.\ \mathbf{F} = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$(i\ F_x + j\ F_y + k\ F_z)$$

$$= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

குறிப்பு: $\nabla.\mathbf{F}$ என்பது திசையிலிச் சார் பலன் ஆகும்.

$\therefore$ ($\nabla\mathbf{F}$ என்பது வெக்டர் சார்பலன் என்பது நினைவிருக்கட்டும்.)

கணக்கு 1. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 z\,\mathbf{i} - 2y^3 z^2\,\mathbf{j} + xy^2 z\,\mathbf{k}$ என்ருல் $\nabla.\mathbf{F}$ ஐக்காணவும். $(1, -1, 1)$ எனும் புள்ளியில் அதன் மதிப்பு என்ன ?

$$\nabla.\ \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

இங்கு $F_x = x^2 z \quad F_y = -2y^3 z^2 \quad F_z = xy^2 z$

$$\therefore \quad \frac{\partial F_x}{\partial x} = +2xz \quad \frac{\partial F_y}{\partial y} = -6y^2 z^2 \quad \frac{\partial F_z}{\partial z} = xy^2$$

$$(1,-1,1)\text{-ல்} \ \frac{\partial F_x}{\partial x} = +2 \quad \frac{\partial F_y}{\partial y} = -6 \quad \frac{\partial F_z}{\partial z} = 1$$

$\nabla .$ **F**ன் பொது உருவம் $= 2xz\,\mathbf{i} - 6y^2 z^2\,\mathbf{j} + xy^2\,\mathbf{k}$

(1,−1,1)ல் மதிப்பு $= +2 \ -6 \ +1$

$$= -3$$

கணக்கு 2. $\phi = 2x^3 y^2 z^4$ என்றால் $\nabla . \Delta \varphi$ பொது உருவம் காண்க.

$$\nabla \varphi = i\frac{\partial \varphi}{\partial x} + j\frac{\partial \varphi}{\partial y} + k\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$= i\,6x^2 y^2 z^4 + \mathbf{j}\,4x^3 yz^4 + \mathbf{k}\,8x^3 y^3 z^3$$

$$\nabla\cdot\nabla\varphi = \frac{\partial}{\partial x}(6x^2 y^2 z^4) + \frac{\partial}{\partial y}(4x^3 yz^4) + \frac{\partial}{\partial z}(8x^3 y^2 z^3)$$

$$= 12xy^2 z^4 + 4x^3 y^4 + 24x^3 y^2 z^2$$

$$\text{Div grad } \phi = 4\{3xy^2 z^4 + x^3 z^4 + 6x^3 y^2 z^2\}$$

2.12. லாப்லாசியன் செயலி (Laplacian Operator)

$\nabla . \nabla$ என்பது லாப்லாசியன் செயலி எனப்படும். எவ்வாறு **a** · **a** என்பது $\mathbf{a}^2$ என்று எழுதுகிறோமோ, அதுபோன்று $\nabla . \nabla$ என்பதை ∇^2 என எழுதுவோம். ∇^2 என்பது லாப்லாசியன் செயலி.

$$\nabla \varphi = i\frac{\partial \varphi}{\partial x} + j\frac{\partial \varphi}{\partial y} + k\frac{\partial \varphi}{\partial z} \text{ எனும் வெக்டர்}$$

$$\nabla\cdot\nabla\varphi = \nabla\cdot\left(i\frac{\partial \varphi}{\partial x} + j\frac{\partial \varphi}{\partial y} + k\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \cdot \left(i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 z}$$

∇^2 எனும் செயலி $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ எனும் செயலியாகும்.

கணக்கு : $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ என்பது $P(x, y z)$-ன் நிலை வெக்டராஞல்

$$\nabla \cdot \left(\frac{F(r)}{r} \cdot \mathbf{r}\right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 F$$ எனக் காண்க.

$$\nabla \cdot \left(\frac{F(r)}{r} \mathbf{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x F(r)}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y F(r)}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z F(r)}{r}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x F(r)}{r}\right] = x \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{F(r)}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{F(r)}{r}$$

$$= x \cdot \frac{\left[r \frac{dF}{dr} + F\right]}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{F(r)}{r}$$

$$= \frac{x^2}{r^2} \cdot \frac{dF}{dr} - \frac{x^2}{r^3} F(r) + \frac{F(r)}{r}.$$

ஏனெனில் $\left[r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \therefore \quad r\frac{\partial r}{\partial x} = x \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\right]$

இதேபோல $$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y F(r)}{r}\right] = \frac{y^2}{r^3} \frac{dF}{dr} - \frac{y^2}{r^3} F(r) + \frac{F(r)}{r}.$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z F(r)}{r}\right] = \frac{z^2}{r^2}\frac{dF}{dr} - \frac{y^2}{r^3} F(r) + \frac{F(r)}{r}.$$

மூன்றையும் கூட்ட

$$\nabla \left(\frac{F(r)\,\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{d\,F(r)}{d\,r} - \frac{F(r)}{r} + \frac{3\,F(r)}{r}$$

$$= \frac{d\,F(r)}{d\,r} = \frac{2\,F(r)}{r}$$

$$= \frac{1}{r^2}\,\frac{d}{d\,r}\,[r^2\,F(r)]$$

கணக்கு : $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0$ எனக் காட்டவும்

அதாவது $\frac{\partial^2}{\partial\,x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\,z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$

எனக் காட்டவேண்டும்

$\frac{\partial}{\partial\,x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-1}{r^2}\,\frac{\partial\,r}{\partial x}$ ஆனல் $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

ஆனதால் $r\,\frac{\partial\,r}{\partial\,x} = x \quad \therefore \; \frac{\partial}{\partial\,x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\,\frac{x}{r^3}$

$$\therefore \; \frac{\partial^2}{\partial\,x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\,\frac{\left[r^3 - x\,3r^2\,\frac{\partial r}{\partial x}\right]}{r^6}$$

$$= -\,\frac{[r^3 - 3\,r\,x^2]}{r^6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\,x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3\,r\,x^2 - r^3}{r^6}$$

இதேபோல $\frac{\partial^2}{\partial\,y^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3r\,y^2 - r^3}{r^6}$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3r\,z^2 - r^3}{r^6}$$

$$\therefore \quad \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3r\,(x^2 + y^2 + z^2) - 3r^3}{r^6}$$

$$= \frac{3\,r^3 - 3r^3}{r^6} = 0$$

கணக்கு :

$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$ என நிறுவ.

A-ன் பிரிவுகள் $A_1\ A_2\ A_3$ ஆகுக.

B-ன் பிரிவுகள் $B_1\ B_2\ B_3$ ஆகுக.

$$\therefore \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial z} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= [(A_1 + B_1)\,i + (A_2 + B_2)\,j + (A_3 + B_3)\,\mathbf{k}]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(A_1 + B_1) + \frac{\partial}{\partial y}(A_2 + B_2) + \frac{\partial}{\partial z}(A_3 + B_3)$$

$$= \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z}\right)$$

$$\therefore \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot A + \nabla \cdot B$$

[எவ்வாறு $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})$-ன் பரவு விதி பொருந்துமோ, அது போன்று பொருந்துகிறது. அதாவது ∇ என்பது வெக்டர் போன்று வகைக்கெழுச் செயலி போலும் செயல்படுகிறது.]

கணக்கு :

$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = \nabla \cdot f\,\mathbf{A} + f(\nabla \cdot \mathbf{A})$ எனக் கொள்க.

[இங்கு f என்பது திசையிலிச் சார்பலன், $\mathbf{A}$ வெக்டர் சார் பலன்.]

$\mathbf{A}$-ன் பிரிவுகள் A_1, A_2, A_3 ஆகுக.

$$\therefore \quad f\mathbf{A} = fA_1\,\mathbf{i} + fA_2\,j + fA_3\,\mathbf{k}$$

$$\Delta \; f\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}(fA_1) + \frac{\partial}{\partial y}(fA_2) + \frac{\partial}{\partial z}(fA_3)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}A_1 + \frac{\partial f}{\partial y}A_2 + \frac{\partial f}{\partial z}A_3$$

$$+ f\frac{\partial A_1}{\partial x} + f\frac{\partial A_2}{\partial y} + f\frac{\partial A_3}{\partial z}$$

ஆனல் $\Delta f \cdot \mathbf{A} =$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial f}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (A_1\,i + A_2\,j + A_3\,\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}A_1 + \frac{\partial f}{\partial y}A_2 + \frac{\partial f}{\partial z}A_3$$

$$f(\nabla \cdot A) = f\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$\therefore \quad \nabla \cdot (f\mathbf{A}) = \nabla f \cdot \mathbf{A} + f\nabla \cdot \mathbf{A}$$

[∇ என்பது வெக்டர் போன்றும், வகைக் கெழுச் செயலி போன்றும் செயல்படுவது காண்க.]

கணக்கு.

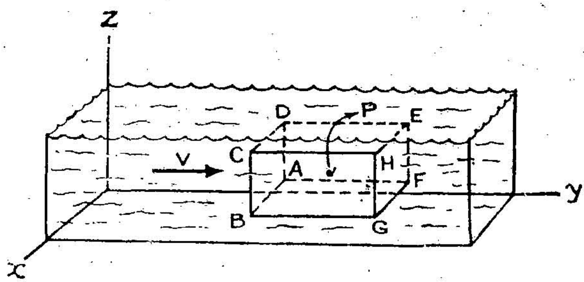
ஓர் இயங்கும் நீர் மண்டலத்தில் $P\ (x, y, z)$ எனும் புள்ளியில் அதன் திசை வேகம் $V(x, y, z)$. Pஐ மையமாகவும், Δx, Δy, Δz நீளமுள்ள அச்சுகளுக்கு இணையான விளிம்புகளையுடைய கனச் செவ்வகத்தினுள் அலகு காலத்தில் ஒவ்வொரு அலகுக் கொள்ளளவிற்கு (in unit time per unit volume) எனும் நீர் அளவு (gain in fluid) d u V (அதாவது $\nabla \cdot V$) எனக் காட்டவும்.

P–ல் V-ன் x பிரிவு $= V_1$

$AFED$ என்ற பக்கத்தில் x பிரிவு $= V_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial V_1}{\partial x}\Delta x$

GHCB என்ற பக்கத்தில் x பிரிவு $V_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial V_1}{\partial x}\Delta x$

$\therefore$ *AFED* பக்கத்தைத் தாண்டும் நீரளவு



படம் 7.

$$\text{அலகு காலத்தில்} = \left(V_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial V_1}{\Delta x}\right)\Delta y\,\Delta z$$

$$= V_1\,\Delta y\,\Delta z - \frac{1}{2}\frac{\partial V_1}{\partial x}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

(2) இதே போல் எதிர்ப் பக்கத்தைத் தாண்டும் நீரளவு

$$= V_1\,\Delta y\,\Delta z + \frac{1}{2}\frac{\partial V_1}{\partial x}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

$\therefore$ மொத்தம் வெளியில் நீரின் ஏற்றம், அலகு நேரத்தில்

$$= (2) - (1)$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial x}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

இது $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ எனும் கொள்ளளவுக்கு ஆதலால், நீரேற்றம் அலகு நேரத்தில் அலகுக் கொள்ளளவுக்கு

$$= \frac{\partial V_1\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta x}{\partial x\,.\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z} = \frac{\partial V_1}{\partial x}.$$

மேற் கூறியது நீரின் x-ன் திசையில் உள்ள திசை வேகத்தின் பிரிவால் ஏற்பட்டது.

இதே போன்று y திசையில் உள்ள திசை வேகத்தின் பிரிவால் ஏற்படக் கூடிய நீரேற்ற விகிதம் $\frac{\partial V_2}{\partial y}$

x திசையில் $\frac{\partial V_3}{\partial z}$.

ஆகவே மொத்த நீரேற்றம் அல்லது பாய்வு

$$= \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

$$= \nabla \cdot \mathbf{V}$$

இவ்வாறு $\mathbf{V}(x, y, x)$ என்பது நீர் மண்டலத்தில் $P(x, y, z)$ எனும் புள்ளியில் திசை வேகமானல், நீரின் பாய்வு (விகிதம் அலகு நேரத்திற்குக் கொள்ளளவுக்கு) $\nabla \cdot \mathbf{V}$ எனக் காண்கிறோம். இவ்வாறு $\nabla \cdot \mathbf{V}$ என்பதன் ஓர் இயல்பியல் பொருள் காணப்படுகிறது.

குறிப்பு : ஒரு புறம் வழிவரும் நீர்தானே எதிர்ப்புறமும் வழி வர முடியும். ஆயின் எவ்வாறு அதிகமாகும் என ஐயம் எழலாம்.

நீர் மண்டலத்தில் சில புள்ளிகளில் நீரூற்றுகளும் (Sources) அஃது நீர் உறிஞ்சிகளும் (sinks) அல்லது வடிகால்களும் இருக்கலாம் அல்லவா? இவ்வாறு இல்லாவிடில் $\Delta \cdot \mathbf{V} = 0$. அப்போது நீரூற்றுகளும் நீர் உறிஞ்சிகளுமில்லா நீர் மண்டலமெனப்படும். அத்தகைய மண்டலத்தில் உள்ள V எனும் வெக்டர் **பாய்விலா வெக்டர்** (Solenoidal Vector) எனப்படும்.

".13. **சுழல்** (Curl): $\nabla \cdot$ என்ற செயலி போன்று வெக்டர் புள்ளிச் சார் பலனின் மேல் செயல்படும் மற்றொரு செயலி ∇X என்பதாகும்.

$\mathbf{F}(x, y, x)$ எனும் சார் பலனின் பிரிவுகள் $F_1\, F_2\, F_3$ ஆகுக.

அப்போது $\nabla \times \mathbf{F}$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \times (F_1\,\mathbf{i} + F_2\,\mathbf{j} + F_3\,\mathbf{k})\right.$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

இதை எளிதில் நினைவு கூறக் கீழ்வரும் அணிக்கோவை உருவில் எழுதுவோம்.

$$\Delta \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

கணக்கு: $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ என்றால் $> \nabla\ \mathbf{F}$ என்ன ?

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (0-0)\,i + (0-0)\,j + (0-0)\,\mathbf{k}$$

$$= 0$$

கணக்கு: $\nabla \times f(r)\,\mathbf{r} = 0$ என நிறுவுக.

$$f(r)\,\mathbf{r} = f(r)\,(i\,x + i\,y + \mathbf{k}\,z)$$

$$\therefore\quad \nabla \times f(r) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xf(r) & yf(r) & zf(r) \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\, z f(r) = z f'(r)\, \frac{\partial r}{\partial y}\ ;\ \frac{\partial}{\partial z}\, y f(r) = y f'(r)\, \frac{\partial r}{\partial z}$$

இது போன்று மற்றவைகளும்.

$$\therefore\ \nabla\ (f(r) = f'(r) \left\{\ i\left(z\frac{\partial r}{\partial y} - y\frac{\partial r}{\partial z}\right)\right.$$

$$+\ \mathbf{j}\left(x\frac{\partial r}{\partial z} - z\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$

$$+\ \mathbf{k}\left(y\frac{\partial r}{\partial x}-x\frac{\partial r}{\partial y}\right)\Bigg\}$$

$r^2=x^2+y^2+z^2$ ஆனதால் $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$; $\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{y}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$

$\mathbf{i}$ பிரிவு $z\frac{\partial r}{\partial y}-y\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{zy-yz}{r}=0$

இது போன்று மற்றிரு பிரிவுகளும் $=0\ \therefore\ \nabla\times f(r)\,\mathbf{r}=0.$

[இதை $\Delta\times(\mathbf{F})$ என்பதன் விரிவைப் பயன் படுத்தியும் செய்யலாம். இது பின்னர் காட்டப்படும்.]

கணக்கு:

$\mathbf{A}=xy^3i-2x^2yz\mathbf{j}+2yz^4\mathbf{k}$ என்றால்

$\nabla\times\mathbf{A}$-ன் மதிப்பை $(1,-1,1)$ எனும் புள்ளியில் காணவும்.

$$\nabla\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy^3 & -2x^2yz & 2yz^4\end{vmatrix}$$

$\therefore\ i$ பிரிவு $=\frac{\partial}{\partial x}(2yz^4)-\frac{\partial}{\partial y}(-2x^2yz)$

$$=2z^4+2x^2y.$$

பிரிவு $=\frac{\partial}{\partial x}(xy^3)-\frac{\partial}{\partial x}(2yz^4)$

$$=3xz^2+0$$
$$=3xz^2$$

$\mathbf{k}$ பிரிவு $=\frac{\partial}{\partial x}(-2x^2yz)-\frac{\partial}{\partial y}(xy^3)$

$$=-4xyz-0$$

$$=-4xyz.$$

$$\therefore \ \nabla \times \mathbf{A} = (2z^4 + 2x^2y)\,\mathbf{i} + 3xz^2\mathbf{j} - \nabla xyz\,\mathbf{k}$$

$x=1, y=-1, z=1$ எனப் பிரதியிட

$\nabla \times \mathbf{A}$-ன் மதிப்பு $= 3\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$.

குறிப்பு (1): சரிவு, பாய்வு, சுழல் இவற்றைக் கீழ்வருமாறும் கூறலாம்.

$$\nabla f = i f_x + j f_y + k f_z \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = i.\mathbf{F}_x + \mathbf{j}\cdot\mathbf{F}_y + \mathbf{k}\cdot\mathbf{F}_z \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = i \times \mathbf{F}_x + \mathbf{j} \times \mathbf{F}_y + \mathbf{k} \times \mathbf{F}_z \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

[இங்கு f_x என்ருல் $\frac{\partial f}{\partial x}$ எனப் பொருளாம். இது போன்று மற்றவைகளும். மேற்கூறிய சூத்திரங்களைச் சரி பார்க்கவும்.]

$\Delta \mathbf{F}$ எனும் வெக்டரின் சரிவு $\mathbf{i}\,\mathbf{F}_x + \mathbf{j}\,\mathbf{F}_y + \mathbf{k}\,\mathbf{F}_z$ எனக் கூறலாம்.

[இங்கு இரண்டு வெக்டர்கள் அடுத்தடுத்து எழுதப்பட்டுள்ளன. இவ்வாறு வருவதை இரட்டை வெக்டர் (Dyad) என்பர். இவை வரும் கோவை **இரட்டை வெக்டர் கோவை** (Dyadics) எனப் பெயராகும். இவை பற்றி இந் நூலில் விவரிக்கவில்லை.]

குறிப்பு (2): $\mathbf{F} = i\,F_1 + j\,F_2 + \mathbf{k}\,F_3$

$$\therefore \ \mathbf{F}_x = i\,\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} + j\,\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x} + \mathbf{k}\,\frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial x}$$

$\therefore \ i.\mathbf{F}_x = \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x}$ இதே போல $j.\ \mathbf{F}_y = \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y}$ $\quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{F}_3 = \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial z}$

$$\therefore \nabla \cdot \mathbf{F} = i.\mathbf{F}_x + \mathbf{j}\cdot\mathbf{F}_y + k.\mathbf{F}_z]$$

இவற்றைப் பயன் படுத்திப் பின்வரும் சூத்திரங்கள் காண்போம்.

(1) $\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A}+\Delta\cdot\mathbf{B}$

(2) $\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A}+\Delta\times\mathbf{B}$

(3) $\nabla\times(f\mathbf{A}) = \nabla f.\mathbf{A}+f\Delta.\mathbf{A}$

(4) $\nabla\times(f\mathbf{A}) = \nabla f\times\mathbf{A}+f\Delta\times\mathbf{A}$

(1) $\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{i}.(\mathbf{A}+\mathbf{B})x+\mathbf{j}.(\mathbf{A}+\mathbf{B})y+\mathbf{k}.(\mathbf{A}+\mathbf{B})z$

$$= \mathbf{i}.\mathbf{A}_x + \mathbf{i}.\mathbf{B}_x$$

$$+ \mathbf{j}.\mathbf{A}_y + \mathbf{j}.\mathbf{B}_y$$

$$+ \mathbf{k}.\mathbf{A}_z + \mathbf{k}.\mathbf{B}_z$$

$\therefore\ \underline{\underline{\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla\cdot\mathbf{B}}}$

(2) புள்ளிக்குப் பதில் × என இட்டால்

$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A}+\nabla\times\mathbf{B}$ என வரும்.

(வாசகர்கள் செய்து பார்க்கவும்).

(3) $\Delta.(f\mathbf{A}) = i.(f\mathbf{A})_x+\mathbf{j}.(f\mathbf{A})_y+\mathbf{k}.(f\mathbf{A})_z$

$$= i.(f_x\mathbf{A}+f\mathbf{A}_X)$$

$$+ \mathbf{j}.(f_y\mathbf{A}+f\mathbf{A}_y)$$

$$+ \mathbf{k}.(f_z\mathbf{A}+f\mathbf{A}_z)$$

$$= (\mathbf{i}f_x+\mathbf{j}f_y+\mathbf{k}f_z)\cdot\mathbf{A}+f(i.\mathbf{A}_x+\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}y+\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}z)$$

$$= \nabla f\cdot\mathbf{A}+f\nabla\cdot\mathbf{A}.$$

புள்ளிக்குப் பதிலாக × எனும் குறியிட்டு வழிகளை எடுத்தால்,

(4) $\nabla\times(f\mathbf{A}) = \nabla f\times\mathbf{A} \div f\nabla\times\mathbf{A}$ என வரும்.

கணக்கு: கீழ் வருபவனவற்றை நிறுவுக.

(1) $\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{g}) = \mathbf{g}\cdot\nabla\times\mathbf{F}-\mathbf{F}.\nabla\times\mathbf{g}$

$$\Delta.\ (\mathbf{F}\times\mathbf{g}) = \mathbf{i}.\ (\mathbf{F}\times\mathbf{g})_x + \mathbf{j}.\ (\mathbf{F}\times\mathbf{g})_y + \mathbf{k}.\ (\mathbf{F}\times\mathbf{g})_z$$

$$= \mathbf{i}.\ (\mathbf{F}_x\times\mathbf{g}) + \mathbf{i}.\ (\mathbf{F}\times\mathbf{g}_x)$$

$$+ \mathbf{j}.\ (\mathbf{F}_y\times\mathbf{g}) + \mathbf{j}.\ (\mathbf{F}\times\mathbf{g}_y)$$

$$+ \mathbf{k}.\ (\mathbf{F}_z\times\mathbf{g}) + \mathbf{k}.\ (\mathbf{F}\times\mathbf{g}_z)$$

இதில் $\mathbf{i}\times\mathbf{F}_x\times\mathbf{g} = \mathbf{g}\ .\ \mathbf{i}\times\mathbf{F}_x$

$\mathbf{i}\ .\ \mathbf{F}\times\mathbf{g}_x = -\ \mathbf{F}.\ \mathbf{i}\times\mathbf{g}_x$ இது போன்று மற்றவைகளும்.

$$\therefore\ \nabla.\ (\mathbf{F}\times\mathbf{g}) = \mathbf{g}.\ (\mathbf{i}\times\mathbf{F}_x + \mathbf{j}\times\mathbf{F}_y + \mathbf{k}\times\mathbf{F}_z)$$

$$-\ \mathbf{F}.\ (\mathbf{i}\times\mathbf{g}_x + \mathbf{j}\times\mathbf{g}_y + \mathbf{k}\times\mathbf{g}_z)$$

$$= \mathbf{g}.\ \Delta\times\mathbf{F} - \mathbf{F}.\ \Delta\times\mathbf{g}.$$

கணக்குகளில் கண்ட வாய்பாடுகளைத் தொகுத்துக் கூறுவோம்.

$$\nabla\ (f+\mathbf{g}) = \nabla f + \nabla\mathbf{g}$$

$$\nabla.\ (\mathbf{F}+\mathbf{g}) = \nabla.\ \mathbf{F}. + \nabla.\mathbf{g}$$

$$\nabla\times(\mathbf{F}+\mathbf{g}) = \nabla\times\mathbf{F} + \nabla\times\mathbf{g}$$

$$\Delta f\mathbf{g} = f\nabla\mathbf{g} + \mathbf{g}\nabla f$$

$$\nabla.\ f\mathbf{F} = f\nabla.\ \mathbf{F} + \nabla f.\ \mathbf{F}$$

$$\nabla\times f\mathbf{F} = f\nabla\times\mathbf{F} + \nabla f\times\mathbf{F}$$

$$\nabla.\ (\mathbf{F}\times\mathbf{g}) = \mathbf{g}.\ (\nabla\times\mathbf{F}) - \mathbf{F}.\ \nabla\times\mathbf{g}$$

இன்னும் சில முக்கிய சூத்திரங்கள்

$$\nabla.\ \nabla f = \nabla^2 f \qquad \text{......(1)}$$

$$\nabla\times(\nabla f) = \mathrm{O} \qquad \text{......(2)}$$

$$\nabla.\ (\nabla+\mathbf{g}) = 0 \qquad \text{......(3)}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{g}) = \nabla\ (\nabla.\ \mathbf{g}) - \nabla^2\mathbf{g} \qquad \text{......(4)}$$

குறிப்பு இங்கு Δ என்பது வெக்டரைப் போன்று செயல் படுகிறது. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ என்பதாலும் $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ என்பவற்றிலிருந்து (2), (3) நினைவு கூறலாம். $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, என்பதில் $\mathbf{a} = \nabla$ $\mathbf{b} = \nabla$ என்பதைப் பிரதியிட (4)ஆவது வரும்.

$$(2) \quad \nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y}\right) i + \text{cy cl}$$

$$= 0\, i + 0\, j + 0\, \mathbf{k} = 0$$

$$(3) \quad \nabla \times \mathbf{g} = \begin{vmatrix} i & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial z}\right) i + \text{cycl}\ldots$$

$$\therefore \quad \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{g} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial z}\right) + \text{cycl}$$

$$= \frac{\partial^2 \mathbf{g}_3}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 \mathbf{g}_2}{\partial x\, \partial z}$$

$$+ \frac{\partial^2 \mathbf{g}_1}{\partial x\, \partial z} - \frac{\partial^2 \mathbf{g}_3}{\partial y\, \partial x}$$

$$+ \frac{\partial^2 \mathbf{g}_2}{\partial z\, \partial x} - \frac{\partial^2 \mathbf{g}_1}{\partial z\, \partial y}$$

$$= 0$$

(4) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{g})$-ல் i பிரிவை மட்டும் பார்ப்போம்.

$\mathbf{g}$-ன் பிரிவுகள் g_1, g_2, g_3 என்றால்

$\nabla \times g$-ன் பிரிவுகள் $\left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)$

$$\therefore \nabla \times (\nabla \times \mathbf{g})\text{-ல் } i \text{ பிரிவு} = \left(\frac{\partial^2 g_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 g_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 g_3}{\partial z \partial x}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial x \partial y} \times \frac{\partial^2 g_3}{\partial x \partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g_1}{d y^2} + \frac{\partial^2 g_1}{d z^2}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\nabla \cdot g) - \nabla^2 g_1$$

இதே போல $\mathbf{j}$ பிரிவு $= \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \cdot \mathbf{g}) - \nabla^2 g_2$

$\mathbf{k}$ பிரிவு $= \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \cdot g) - \nabla^2 g_3$

$$\therefore \nabla \times (\nabla \times \mathbf{g}) = \nabla(\nabla \cdot g) - \nabla^2 \mathbf{g}$$

[ஆனால் $\nabla^2 \mathbf{g}$ என்பதைப் பற்றிக் கூறவில்லையாதலால், இதை நாம் இங்குக் கவனிக்க வேண்டாம்].

கணக்கு $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$ என்பதில் $\mathbf{w}$ நிலைவெக்டர் $(\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}})$ என்றால் $\nabla \times \mathbf{v} = 2\,\mathbf{w}$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$i \text{ பிரிவு} = \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}$$

ஆனால் $v_1 i + v_2 j + v_3 \mathbf{k} = (\omega_1 i + \omega_2 j + \omega_3 \mathbf{k}) \times (xi + yj + z\mathbf{k})$

$\therefore\ v_1 = \omega_2 z - \omega_3 y;\ v_2 = \omega_3 x - \omega_1 z\ \ v_3 = \omega_1 y - \omega_2 x$

$$\therefore \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = \omega_1 - (-\omega_1) = 2\omega_1$$

இதே போல $\mathbf{j}$ பிரிவு $= 2\omega_2$

$\mathbf{k}$ பிரிவு $= 2\omega_3$

$$\therefore\ \nabla \times \mathbf{v} = 2(\omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k})$$

$$= 2\mathbf{w}$$

[$\mathbf{w}$ என்பது சுழல் திசை வேகம் (angular velocity). இவ்வாறுன 'சுழல்' $\mathbf{v} = 2$ சுழல் திசை வேகம்.

அதாவது $\nabla \times \mathbf{v} = 2\mathbf{w}$

இதனால் $\nabla \times$ எனும் செயலிக்குச் சுழல் எனப் பெயர் வந்தது.]

$\nabla \times \mathbf{v} = 0$ என்றுல், $\mathbf{v}$ என்பது சுழலில்லா வெக்டர் (irrotational vector) எனவும், அது வரும் மண்டலம் சுழலில்லா மண்டலம் (irrotational field) எனவும் பெயர் பெறும்.

கணக்கு :

$\nabla^2 \phi(x, y, z) = 0$ **என்றுல்** $\nabla \varphi$ **எனும் வெக்டர் பாய்விலா வெக்டரும், சுழலிலா வெக்டரும்** (Solenoidal and irrotational) **ஆகும்** என நிறுவுக.

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = 0$$

$\therefore\ \nabla \varphi$ பாய்விலா வெக்டராகும்.

$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$ எனவும் கண்டோம்.

$\therefore\ \nabla \varphi$ என்பது சுழலிலா வெக்டருமாகும்.

கணக்கு :

$\nabla \cdot \nabla r^m = m(m+1) r^{m-2}$ எனக் காண்க.

$\nabla f(r) = \frac{df}{dr} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$ எனும் சூத்திரத்தால்

$$\nabla r^m = m r^{m-1} \frac{\mathbf{r}}{r} = m r^{m-2} \mathbf{r}$$

$$\nabla \cdot m r^{m-2} \mathbf{r} = m r^{m-2} \nabla \cdot \mathbf{r} + \nabla m r^{m-2} \cdot \mathbf{r}$$

$$= m r^{m-2} [\mathbf{i} \cdot \mathbf{r}_x + \mathbf{j} \cdot \mathbf{r}_y + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_z]$$

$$+ m(m-2) r^{m-4} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$$

$$= m r^{m-2} (1+1+1)$$

$$+ m(m-2) r^{m-2}$$

$$= m r^{m-2} [m-2+3]$$

$$= \underline{m(m+1) r^{m-2}}$$

$[i \cdot \mathbf{r}_x = i \cdot \mathbf{i} = 1; j \cdot \mathbf{r}_y = j \cdot \mathbf{j} = 1 \;\; \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_z = 1]$.

பயிற்சி

1. $\nabla \cdot (r^8 \mathbf{r}) = 6 r^8$ எனக் காண்க.

2. $\nabla^2 (\varphi \phi) = \phi \nabla^2 \phi + 2 \nabla \varphi \cdot \nabla \phi \times \phi \nabla^2 \varphi$ என நிறுவுக.

3. $\nabla^2 \left[\Delta \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^2} \right]$-ன் மதிப்பு $\frac{2}{r^4}$ எனக் காண்க.

4. $\nabla \times \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{r^3} = - \frac{\mathbf{a}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}$ என நிறுவுக.

5. $\mathbf{V} = \left(y \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{z \partial f}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{z \partial f}{\partial x} - \frac{x \partial f}{\partial z} \right) \mathbf{j}$

$$+\left(x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{k}$$ என்றால்

$\mathbf{V}=\mathbf{r}\times\nabla f$ எனவும், $\mathbf{V}\cdot r=0$ எனவும்,

$\mathbf{V}\cdot\nabla f=0$ எனவும் நிறுவுக.

6. $\mathbf{u}=\dfrac{-xi+y\mathbf{j}}{x^2+y^2}$ என்றால் $\nabla\cdot\mathbf{u}$-ன் மதிப்பையும், $\nabla\times\mathbf{u}$-ன் மதிப்பையும் காண்க.

7. $u=x^2-y^2$ என்றால், $\nabla^2 u=0$ என நிறுவுக.

8. $\mathbf{A}=(6xy+z^3)\ \mathbf{i}+(3\ x^2-z)\ \mathbf{j}+(3xz^2-y)\ \mathbf{k}$ எனும் வெக்டர் சுழலில்லாதது என நிறுவுக. $A=\nabla\phi$ எனும் படியுள்ள ϕ எனும் சார்பலன் காண்க.

9. $\mathbf{E}=\dfrac{\mathbf{r}}{r}$ என்பது சுழலில்லா வெக்டர் எனக் கண்டு, $-\nabla\phi=E$ எனும் படியுள்ள ϕ எனும் சார்பலனை $\phi(a)=0$ என்றால் காண்க.

10. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ என்பன சுழலில்லா வெக்டர்களானால், $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ என்பது பாய்வில்லா வெக்டரென நிறுவுக.

3. வெக்டர் நுண்தொகை கணிதம்

(Vector Integral Calculus)

3.1. வரையறுக்கப்படாத வெக்டர் நுண்தொகை

$$\frac{d}{d\,u}\ \mathbf{F}\,(t) = \mathbf{R}\,(t)$$ என்றால்

$\int \mathbf{R}\,(t)\ d\,t = \mathbf{F}\ (t)$ என்பது $\mathbf{R}\ (t)$ எனும் வெக்டர் சார்பலனின் 't' எனும் திசையிலியைச் சார்ந்த வரையறுக்கப் படாத நுண் தொகை (Indefenite integral) எனப்படும். (நுண் தொகையை இனிமேல் தொகை என்றே கூறுவோம்).

இதன்படி $\mathbf{c}$ என்பது ஏதேனும் ஒரு மாறு வெக்டரானல் (Arbitrary constant vector)

$\int \mathbf{R}\ (t)\ d\,t = \mathbf{F}\ (t) + \mathbf{c}$ என்பதும் தீர்வாகும்.

3.2. வரையறுக்கப்பட்ட தொகை

$$\int_a^b \mathbf{R}\ (t)\ b\,t = \int_a^b \frac{d}{d\,t}\mathbf{F}\ (t)\ d\,t = \Big[\ \mathbf{F}\ (t) + \mathbf{c}\Big]_a^b$$

$$= \mathbf{F}\ (b) - \mathbf{F}\ (a)$$

என்பது $t = a,\ t = b$ என்ற எல்லைகளுள் $\mathbf{R}(t)$-ன் வரையறுக்கப் பட்ட தொகை (Defenite integral) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு : ஒரு துகள் **g** எனும் மாரு முடுக்கத்துடன் இயங்குகிறது. அதன் துவக்க வேகம் **u** என்ருல் 't' நேரத்தில் (i) அதன் திசை வேகம் என்ன (ii) அதன் நிலை என்ன ?

O எனும் துவக்கப் புள்ளியை ஆதியாகக்கொண்டு துகளின் நிலை வெக்டர் **r** ஆகுக. அப்போது அதன் திசை வேகம் $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. அதன் முடுக்கம் $\frac{d\,\mathbf{v}}{dt}$

ஆனல் எப்போதும் முடுக்கம் **g**.

$$\therefore \frac{d\,\mathbf{v}}{d\,t} = \mathbf{g}$$

$$\therefore \int d\,\mathbf{v} = \int \mathbf{g}\,d\,t$$

$$\therefore \mathbf{v} = \mathbf{g}t + \mathbf{A}$$

$t=0$ எனும்போது $\mathbf{v}=\mathbf{u}$ ஆவதால், $\mathbf{A}=\mathbf{u}$

(i) $$\therefore \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{g}\,t$$

[t நேரத்தில் திசை வேகம் **v**, **u**, **g** என்ற வெக்டர்களின் ஒரு படிச் சேர்க்கை யாவதால் அதுவும் **u g** அடக்கிய தளத்தில் அமையும்.]

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u} + \mathbf{g}\,t$$

$$\therefore \int d\mathbf{r} = \int \mathbf{u}\,dt + \int \mathbf{g}\,t dt$$

$$\therefore \mathbf{r} = \mathbf{u}t + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{g}t^2 + \mathbf{B}$$

$t=0$ எனும்போது $\mathbf{r}=0$ ஆவதால், $\mathbf{B}=0$

(ii) t நேரத்தில் துகளின் நிலை வெக்டர்

$$\underline{\mathbf{r} = \mathbf{u}\,t + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{g}\,t^2}$$

குறிப்பு 1: இது துகளின் இயக்குப் பாதையின் வெக்டர் சமன் பாடாகும். **r** என்பது **u**, **g** எனும் வெக்டர்களின் ஒரு படிச் சேர்க்கை (Linear Combination) ஆவதால், துகளின் பாதை **u**, **g** அடக்கிய தளத்தில் அமையும்.

[**குறிப்பு 2** (a): **u**, **g** அடக்கிய தளத்தில், கிடைக் கோட்டை x அச்சாகக் கொள்வோம். மேல் நோக்கு நிலைக் கோட்டை y அச்சாகக் கொள்வோம். துகள் மேல் புவியீர்ப்பு விசையால் ஏற்படும் முடுக்கம் செயல்படுகிறதென்போம். x திசையில் அலகு வெக்டர் **i**, y திசையில் அலகு வெக்டர் **j**; கிடைக்கோட்டுடன் **u**-வின் கோணம் α.

$|\mathbf{u}| = u$ எனின் $\mathbf{u} = u\cos\alpha\, i + u\sin\alpha\, \mathbf{j}$

$|\mathbf{g}| = g$ எனின் $\mathbf{g} = -gj$.

$r = x\, i + y\, \mathbf{j}$ என்றால்

$$(x i + y j) = (u\cos\alpha\, i + u\sin\alpha\, j)\, t - \tfrac{1}{2} g t^2 \mathbf{j}$$

$$\therefore x = u\cos\alpha\, t$$

$$y = u\sin\alpha\, t - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

என துகளின் இயங்கு வழி 't' எனும் துணை அளவியல் (Parameter) வருகிறது.

குறிப்பு 2 (b): ஆதியைத் துகள் கிடை திசையில் செல்லுமிடத்துக் கொண்டு, கீழ் நோக்கு நிலைக் கோட்டை x அச்சாகவும், துகள் ஆதியில் செல்லும் திசையை (அதாவது அதன் மிக உயர்ந்த நிலை) x அச்சாகவும் கொண்டால்,

$$\mathbf{u} = u\cos\alpha\, j \qquad \mathbf{g} = g\, i$$

$$\therefore\ x i + y j = u\cos\alpha\, j t + \tfrac{1}{2} g\, i\, t^2$$

$$\therefore\ x = \tfrac{1}{2} g t^2 \quad y = u\cos\alpha\, t \quad \text{அல்லது } y^2 = \frac{2u^2\cos^2\alpha}{g} x \text{ என}$$

வரும்.]

கணக்கு:

$\mathbf{F}(t)=(t-t^2)\,i+2t^3\,\mathbf{j}-3\,\mathbf{k}$ என்றால்

(i) $\int \mathbf{F}(t)\,dt$ (ii) $\int_1^2 \mathbf{F}(t)\,dt$ காண்க.

$$\text{(i)} \quad \int \mathbf{F}(t)dt=\int [(t-t^2)\,\mathbf{i}+2t^3\mathbf{j}-3\,\mathbf{k}]\,dt$$

$$=i\int (t-t^2)\,dt+\mathbf{j}\int 2t^3 dt+\mathbf{k}\int -3\,dt$$

$$=i\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right]+j\left[\frac{t^4}{2}\right]+\mathbf{k}\,[-3t]$$

$$+c_1\,\mathbf{i}+c_2\,\mathbf{j}+c_3\,\mathbf{k}$$

$$=\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right)i+\left[\frac{t^4}{2}\right]\mathbf{j}-3t\,\mathbf{k}+\mathbf{c}$$

$$\text{(ii)} \quad \int_1^2 \mathbf{F}(t)\,dt=\left\{\left[\frac{4}{2}-\frac{8}{3}\right]i+\frac{16}{2}\,\mathbf{j}-6\mathbf{k}+\mathbf{c}\right\}$$

$$-\left\{\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\right)i+\tfrac{1}{2}\,\mathbf{j}-3\mathbf{k}+\mathbf{c}\right\}$$

$$=-\frac{5}{6}\,i+\frac{15}{2}\,j-3\mathbf{k}$$

கணக்கு:

$\int \mathbf{A}\times\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\,dt$ காண்க.

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)=\frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\frac{d\mathbf{A}}{dt}+\mathbf{A}\times\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}$$

$$= 0 + \mathbf{A} \times \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}$$

$$= \mathrm{A} \times \frac{d^2\,\mathrm{A}}{d\,t^2}$$

$$\therefore \quad \int \mathbf{A} \times \frac{d^2\mathrm{A}}{dt^2} = \mathrm{A} \times \frac{d\mathrm{A}}{dt} + \mathbf{c}$$

பயிற்சி

1. $\mathbf{k}\,(t) = (3\,t^2 - t)\,i + (2-5\,t)\,\mathbf{j} - 3\,t\,\mathbf{k}$ என்றால்,

(i) $\int \mathbf{k}\,(t)\,dt$ (ii) $\int_2^3 \mathbf{k}\,(t)\,dt$ காண்க.

2. $\int_0^{\pi/2} (5 \sin u\; i + 2 \cos u\; j)\,du$ காண்க.

3. $\mathbf{A} = t\,\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\,t\,\mathbf{k}$

$\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$

$\mathbf{C} = 3\,i + t\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$ என்றால்

(i) $\int_1^2 \mathrm{A}.\mathbf{B}\times\mathbf{C}\,dt$ (ii) $\int_1^2 \mathrm{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\,dt$ காண்க.

(4) $A\,(2) = 2\,i - \mathrm{j} + 2k \quad A\,(3) = 4\,i - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

என்றால், $\int_2^3 \mathrm{A}.\,\frac{d\,\mathrm{A}}{dt}\,dt$-ன் மதிப்பு காண்க,

5. ஓர் அலகுத் திணிவுள்ள துகளின் நிலை வெக்டர் 't' நேரத்தில் $\mathbf{r}$; $|\mathbf{r}| = r$ என்றால் $\frac{d^2r}{dt^2} = f\,(r)\,\mathbf{r}$ எனத் தரப்படுகிறது.

அப்போது (i) $\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}=c$ (மாறு வெக்டர்) எனக் காண்க.

(ii) இதன் வரை கணிதப் பொருள் என்ன?

(iii) $(a) f(r) < 0$ (b) $f(r) > 0$ என்றால் விளக்கம் கூறுக.

3.3. வரை நுண்தொகை (Line integrals)

$x = x(t)$, $y = (t)$, $z = z(t)$ எனும் வரையை Γ எனக் குறிப்போம். $t_1 \leq t \leq t_2$ என்ற இடைவெளியில் $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ எனும் சார் பலன்கள் மேற்கூறிய ஒழுங்கு வரையில் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் திட்டமான மதிப்புடையதாக இருக்கட்டும். அப்போது Γ எனும் வரைமீது **வரை நுண் தொகை என்பது** $\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ **எனும் ரீமென் தொகையாம்** ($t_1 - t_2$ எனும் இடைவெளியில்).

x, y, z-க்குத் துணை அளவி 't'-ல் பிரதியிட $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ எனச் சார்பலன்கள் $P(x, y, x)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ மாறினால் $\frac{dx}{dt} = x'(t)\frac{dy}{dt} = \mathbf{y}'(t)\ \frac{dz}{dt} = z''(t)$ ஆவதால் வரை நுண்தொகை,

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{t_1}^{t_2} (P)(t)\,x'(t)\,dt + (Q)(t)\,y'(t)\,dt$$

$+ (R)(t)\,z'(t)\,dt$ ஆகும்.

குறிப்பு : Γ எனும் வரை ஒரே ஒழுங்கு வரையானால், $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ தொகையுடைச் சார் பலன்களானால், வரை நுண் தொகையும் உள்ளது. Γ என்பது பல துண்டு ஒழுங்கு வரைகளால் ஆக்கப்பட்டதென்றால், ஒவ்வொரு துண்டிலும் வரை நுண் தொகை கண்டு அவற்றின் கூடுதல் மொத்தத் தொகையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு : $I = \int x\,dy - y\,dx$ எனும் நுண் தொகையை $(0, 0)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து $(1, 1)$ எனும் புள்ளி வரை,

(i) அவற்றைச் சேர்க்கும் கோட்டின் வழி

(ii) $(0, 0) - (1, 0) - (1, 1)$ எனும் பாதை வழி

(iii) $(0, 0) - (0, 1) - (1, 1)$ எனும் பாதை வழி

(iv) $y = x^2$ எனும் வரையின் வில் வழி

(v) $x = \cos t \cdot y = 1 + \sin t \ (-\frac{\pi}{2} \le t \le 0)$ எனும்

வட்ட வில் வழி வரை நுண் தொகைகளைக் காணவும்

(i) $(0, 0)$, $(1, 1)$ எனும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு

$$y = x \qquad \therefore\ dy = dx$$

$$\therefore\quad I = \int x\,dy - y\,dx$$

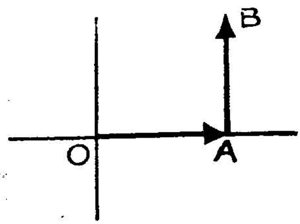
$$= \int x\,dx - x\,dx = 0$$

(ii) OA எனும் முதல் துண்டு பிறகு AB எனும் துண்டும் முதல் துண்டில் $y = 0 \quad \therefore\ dy = 0$

$$\therefore \int x\,dy - y\,dx = 0$$

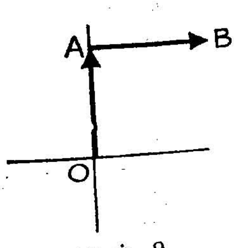
2–வது துண்டில் $x = 1$

$$\therefore\ dx = 0 \quad \therefore \int_0^1 1 \cdot dy = 1$$



படம் 8.

$\therefore$ வரை நுண் தொகை $= 0 + 1 = 1$



படம் 9.

(ii) இங்கும் இரண்டு துண்டுகள்,

OA எனும் துண்டில் $x = 0 \qquad \therefore\ dx = 0$

$$\therefore \int x\,dy - y\,dx = 0$$

AB எனும் துண்டில் $y = 1 \quad dy = 0$

$$\therefore \int x\,dy - y\,dx \qquad = -\int_0^1 dx \;=\; -1$$

(iv) $y = x^2$ ஆதலால் $dy = 2\,x\,dx$

$$\therefore \int_0^1 x\,dy - y\,dx = \int_0^1 2\,x^2\,dx - x^2\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

(v) $x = \cos t \quad \therefore\ dx = \sin t\ dt$

$$y = 1 + \sin t \quad dy = \cos t\ dt$$

$$\therefore \int x\,dy - y\,dr = \int \cos t\,(\cos t)\ dt - \int (1 + \sin t)\,(-\sin t)\,dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (\cos^2 t + \sin^2 t + \sin t)\,dt$$

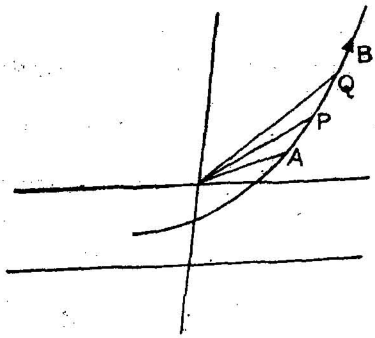
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1 + \sin t)\,dt$$

$$= [t - \cos t]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$= (-1) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

3.4. $\int_A^B (x\,dy - y\,dx)$ என்பதன் விளக்கம்



படம் 10.

$P(x, y)$, $Q(x + \nabla x, y + \Delta y)$ என்பவை வரை மீது இரண்டு அடுத்தடுத்த புள்ளிகளாகுக.

$\therefore$ OPQ எனும் முக்கோணப் பரப்பு $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ x + \Delta x & y + \Delta y \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(xy + x\ \Delta y) - (yx + y\,\Delta x)$

$= \frac{1}{2}(x\ \Delta y - y\,\Delta x)$

$\therefore \int \therefore x\ \Delta y - y\Delta x = 2 \cdot \nabla$ OPQ-ன் பரப்பு

$\therefore \int_A^B x\,dy - y\,dx = 2$ ஆரைச் சிறைப் பரப்பு OAB (Twice area of sector OAB)

(i) முதலில் நேர்கோடாதலால் பரப்பு $= 0$

(ii) $\Delta\ OAB = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ (பரப்பு நேரெண்)

(iii) $|\Delta OAB| = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ ஆனால் எதிரெண் $\Delta\ OAB = -1$

(iv) வளை வரைக்கும் $(0, 0)-(1,1)$ எனும் நேர்கோட்டிற்கு மிடையேயுள்ள பரப்பு $\frac{1}{3}$ ச. அலகு.

3 5. மேற்கூறியதைக் கோண தூரக் கூறுகளில் கூற

$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$

$dy = r\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, dr \quad dx = -r\sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, dr$

$\therefore \quad x\,dy = r\cos\theta\sin\theta\, dr \qquad = r\cos^2\theta\, d\theta$

$y\,dx = r\cos\theta\sin\theta\, dr \qquad -r\sin^2\theta\, d\theta$

$\therefore \quad x\,dy - y\,dx = r\,d\theta$

$\therefore \quad \int x\,dy - y\,dx = \int r\,d\theta = 2A.$ [ஆரச் சிறையின் பரப்பைப் போல் இரு மடங்கு.]

3.6. வரை நுண் தொகையின் வெக்டர் உருவம்

$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ எனும் வரை நுண் தொகையை வெக்டர் சார்பலன்கள் வரும் நுண் தொகையாகக் கூறலாம்.

$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ என்றால் $\mathbf{F}$ என்பது வெக்டர் புள்ளிச் சார் பலனாகும். $\succ(x, y, z)$ எனும் புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\mathbf{r}$ என்றால் $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ ஆகும்.

$\therefore \quad d\mathbf{r} = dx\,.\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}.$

$\therefore \quad \mathbf{F}.\,dr = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

$\therefore \quad \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_\Gamma \mathbf{F}.\,d\mathbf{r}$

ஆனால் $\mathbf{r} = \mathbf{r}\ (t)$ என்பதால் $\int_{\Gamma} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int \mathbf{F}.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt$ புள்ளிச் சார்

பலன் $\mathbf{F}(s)$என வில்லின் நீளம் s–ன் துணையளவியாக இருந்தால்,

வரை நுண் தொகை — $\int_{\Gamma} \mathbf{F}.\frac{d\mathbf{r}}{ds}\, ds.$

ஆனால் $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{T}$ (அலகுத் தொடு கோடு,

∴ வரை நுண் தொகை $= \int_{\Gamma} \mathbf{F}.\mathbf{T}.ds$

3.7 $\int_{\Gamma} \mathbf{F}.\mathbf{r}$-ன் இயக்கவியலில் உள்ள பொருள்

F என்பது விசையாகுக. அது ஒரு துகளின் மேல் செயல் பட (வேறு விசைகளுடனும்) துகள் Γ எனும் வரையின்மீது இயங்கட்டும். 't' நேரத்தில் துகளின் நிலை $\mathbf{r}$ என்றால், அப்போதிருந்து Δt நேரக்தில் அதன் நிலை $\Delta\mathbf{r}$ என மாறுபடும். ஆகவே, $\mathbf{F}.\Delta\mathbf{r}$ என்பது விசை செய்த வேலையாகும். $\Delta t \to 0$ ஆகச் செய்து வரும் நுண் வேலைகளின் தொகை காண

அது $\int_{r1}^{r2} \mathbf{F}\ d\mathbf{r}$ ஆகும்.

ஆகவே, துகள் $\mathbf{r}_1$ எனும் நிலையிலிருந்து $\mathbf{r}_2$ எனும் நிலைக்கு Γ வரையில் இயங்கும்போது அதன் மேல் F செயல் பட்டால்,

F செய்த வேலை $\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F}\ d\mathbf{r}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு : ஒரு மண்டலத்தில் விசை $\mathbf{F} = 3xy\,\mathbf{i} - 5z\,\mathbf{j} + 10x\,\mathbf{k}$. அது ஒரு துகளின் மேல் செயல்பட அது $x = t^2 + 1$, $y = 2t^2$, $z = t^3$ எனும் சமன்பாடுடைய வரையின்மீது இயங்குகிறது. $t = 1$ எனும் புள்ளியிலிருந்து $t = 2$ எனும் புள்ளி வரை இயங்கும்போது F-ன் வேலையைக் கணக்கிடு.

$$\text{வேலை} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}.dr.$$

$$= \int 3\,x\,y\,dx - 5\,z\,dy + 10\,x\,dz$$

ஆனல் $dx = 2t\,dt$; $dy = 4t\,dt$ $dz = 3t^2\,dt$

$$\therefore \quad 3x\,y\,dx - 5z\,dy + 10x\,dz = 3\,(t^2+1)\,(2t^2)\,(2t^2\,dt)$$

$$- 5.(t^3)\,(4t\,dt)$$

$$+10\,(t^2+1)\,d\,(3t^3\,dt)$$

$$= 12t^5 + 10t^4 + 12t^3 + 30t^2)\,dt$$

$$\therefore \quad \text{மொத்த வேலை} = \int_{t=1}^{2} (12t^5 + 10t^4 + 12t^3 + 30t^2)\,dt$$

$$= \underline{\underline{303}}$$

எடுத்துக் காட்டு: $\mathbf{F} = 3\,x\,y\;\mathbf{i} - y\;\mathbf{j}$ என்ருல் $\int_C \mathbf{F}\;d\mathbf{r}$-ன் மதிப்பை $C = y = 2x^2$ எனும் வரைமீது $(0, 0)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து $(1, 2)$ எனும் புள்ளிவரை காண்க.

$$\mathbf{F}.d\mathbf{r} = 3\,x\,y\,dx - y^2 dy; \quad y^2 = 2\,x^2 \quad \therefore \quad dy = \Delta\,x\,dx$$

$$= 3x\,(2\,x^2)\,dx - (2\,x^2)\,(\Delta x)\,dx$$

$$= 6x^3\,dx - 16x^5\,dx$$

$$\therefore \int_{(0,0)}^{1,2} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_0^1 (6\,x^3 - 16x^5)\,dx$$

$$= \left[6.\frac{x^4}{4} - 16\,\frac{x^6}{0}\right]_0^1$$

$$= \frac{6}{4} - \frac{16}{6} = \frac{3}{2} - \frac{8}{3} = \frac{9-16}{6} = \frac{-7}{6}$$

$$= \frac{-7}{6}$$

[$x = t$ $y = 2t^2$ எனப் பிரதியிட்டும் காணலாம்].

3.8. பாதையைச் சாராத வரை நுண்தொகை (Line Integrals independent of the path).

A $(x_1 y_1 z_1)$ B $(x_2 y_2 z_2)$ என்பவை இரு புள்ளிகளாகுக. இரு புள்ளிகள் வழிப் பல வரைகள் செல்லும். $\mathbf{F}$ (x, y, z) எத்தகைய சார் பலனுனல் $\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$-ன் மதிப்பு எல்லா வரைகளிலும் ஒன்ருக இருக்கும் என்பதைக் காண்போம்.

ஒரு மண்டலத்தில் (Region) F எனும் ஒரு வெக்டர் புள்ளிச் சார்பலனின் நுண் தொகை, இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் எல்லாப் பாதைகள் வழியும் சமமாக இருக்கத் தேவையானதும், போதுமானதுமான நியதி, அந்தச் சார் பலன், φ எனும் ஒரு திசையிலிச் சார்பலனின் சரிவாக (∇ φ) இருக்கவேண்டுமென்பதாம்.

நிறுவகை: $\mathbf{F} = \nabla \varphi$ என்பது போதுமானது என்பதைக் காட்டுவோம். $\mathbf{F} = \nabla \varphi$ ஆகுக. அப்போது,

$$\int_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_c \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} = \int_c d\phi = \varphi(B) - \varphi(A)$$

ஆகவே வரை நுண் தொகை மதிப்பு A, B என்ற புள்ளிகளைச் சார்ந்தன; அவற்றைச் சேர்க்கும் வகைகள் எவ்வகைத் தாயினும் அவற்றைச் சார்ந்தவை அல்ல.

தேவை என்பதைக் காட்டுவோம்: வரை நுண் தொகை A-லிருந்து B-க்குச் செல்லும் பாதை யாதாயினும் ஒன்றே எனின், அது φ $(x_1 y_1 z)$ ஆகுக. [$B = (x, y, z)$ $A = (x_1 y_1 z_1)$ என்போம்.]

அப்போது $\varphi \quad (x, y, z) = \int_{x_1 y_1 z_1}^{x, y, z} \mathbf{F} . d\mathbf{r}$

$$= \int_{x_1 y_1 z_1}^{x, y, z} . \mathbf{F} \frac{d\mathbf{r}}{ds} . ds$$

$\therefore \quad \frac{d\varphi}{ds} = F . \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ ஆனால் $\frac{d\varphi}{ds} = \nabla \varphi . \frac{d\mathbf{r}}{ds}$

$\therefore \quad \nabla \varphi . \frac{d\mathbf{r}}{ds} - \mathbf{F} . \frac{d\mathbf{r}}{ds} = 0$

$\therefore \quad (\nabla \varphi - \mathbf{F}) . \frac{d\mathbf{r}}{ds} = 0$

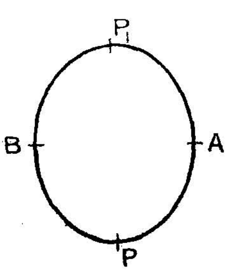
ஆனால் $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ எந்த வரையாயினும் இது பொருந்தும்.

$$\therefore \mathbf{F} = \nabla \varphi$$

இவ்வாறு தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

குறிப்பு: Γ எனும் வரை மூடுவரையானால், (closed curve)

$\int \mathbf{F} . d\mathbf{r} = 0.$ ($F = \nabla \varphi$ எனின்). ஏனெனில் வரையில், P, P_1 இரு புள்ளிகளாகுக. $P A P_1$ வரையின் மீது இடஞ்சுழியாகச் செல்லும் வில், $P B P_1$ வலஞ்சுழியாகச் செல்லும் பாதை வரை நுண் தொகையின் மதிப்பு பாதையைச் சார்ந்ததல்ல ஆதலால் ($F = \nabla \varphi$ என்பதால்)



படம் 11.

$$\int_{P A P_1} \mathbf{F} . d\mathbf{r} = \int_{P B P_1} \mathbf{F} . d\mathbf{r}$$

$$\text{ஆனால்} \int_{PBP_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{P_1BP} \mathbf{F} \cdot dr$$

$$\therefore \int_{PAP_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{P_1BP} \mathbf{F} \cdot dr = 0$$

$$\int_{PAP_1BP} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

மூடுவரை மீது ஒரு சுற்று வந்தால் கிடைக்கும் நுண் தொகை = 0. இதை $\oint$ எனக் குறிப்பது வழக்கம்,

$$\therefore \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot dr = 0$$

குறிப்பு: இவ்வாறு, ஒரு மண்டலத்தில் எந்த இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும், வரைகளைச் சார்ந்த நுண் தொகை $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ வரையைச் சாராது புள்ளிகளை மட்டும் சார்ந்திருக்கிறதோ, அத்தகைய மண்டலம் **'காப்பு மண்டலம்'** (Conservative field) எனப்படும். **F** என்பது விசையானல், அம் மண்டலம் **ஆற்றல் காப்பு விசை மண்டலம்** (conservative force field) **எனப்படும்.**

3.9. காப்பு மண்டலம்: (*a*) F என்பது காப்பு மண்டல வெக்டரானல், சுழல் F (அதாவது $\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ ஆகும். (*b*) மறுதலையாக $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ ஆனல், F காப்பு மண்டலத்தில் உள்ளது.

(*a*) **F** காப்பு மண்டலத்தில் உள்ளது.

$\therefore$ $\mathbf{F} = \nabla \varphi$ ஆகும் [φ எனும் ஒரு திசையிலிச் சார்பலனின் சரிவாகும்]

ஆனல் $\nabla \times \nabla \varphi = 0$ $\therefore$ $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.

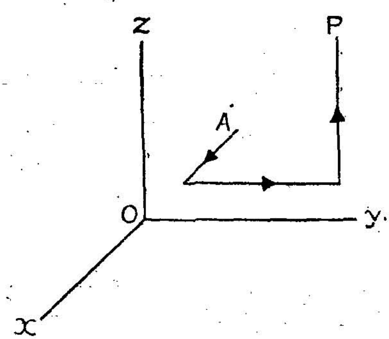
(*b*) $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ ஆகுக. $\mathbf{F} = F_1 i + F_2 j + F_3 k$ என்றல்

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}; \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

இப்போது $\mathbf{F} = \nabla \varphi (x, y, z)$ எனும்படி ஒரு திசையிலிச் சார்பலன் காணலாம் எனக் காட்டுவோம்.

$\int \mathbf{F}\, d\mathbf{r}$ எனும் வரை நுண்தொகையை மண்டலத்தில் $A (x_0 y_0 z_0)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து $P (x, y, z)$ எனும் புள்ளிக்குள்ள ஒரு வரை வழி கொண்டால், அது (x, y, z) எனும் மாறிகளில் ஒரு திசையிலிச் சார்பலனாகும். A–லிருந்து



படம் 12.

x அச்சுக்கு இணையாக, பிறகு y அச்சுக்கு, பிறகு z அச்சுக்கு இணையாகப் பாதை வழி P ஐ அடைவோம். $(x_0 y_0 z_0)$—$(x, y_0 z_0)$ — (x, y, z_0) — (x, y, z) எனும் பாதையாகும். முதல் கோட்டில் x மட்டும் மாறும். இரண்டாவதில், y மட்டும் மாறும்; மூன்றுவதில் z மட்டும் மாறும்.

$$\therefore \quad \varphi (x, y, z) = \int_A^P \mathbf{F} . dr$$

$$= \int_{x_o}^{x} F_1 (x, y_o\, x_o)\, dx$$

$$+ \int_{y_o}^{y} F_2 (x, y, z_o) dy + \int_{z_o}^{z} F_3 (x, y, z)\, dz$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = F_3 (x, y, z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_2 (x, y, z_o) + \int_{z_o}^{z} \frac{\partial F_3}{\partial y} (x, y, x)\, dz$$

ஆனல் $\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{dz}$

$$\therefore \frac{d\varphi}{\partial y} = F_2 (x, y, z_o) + \int_{z_o}^{z} \frac{\partial F_2}{\partial z} dz$$

$$= F_2 (x, y, z_o)) + F_2 (x, y, z) \Big|_{z_o}^{z}$$

$$= F_2 (x, y, z_o) + F_2 (x, y, z) - F_2 (x, y, z_o)$$

$$= F_2 (x, y, z)$$

இதே போல $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ $F_1 (x, y, z)$ என வரும்

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_1 (x, y, z_o) + \int_{y_o}^{y} \frac{\partial F_2}{\partial x} dy + \int_{z_o}^{z} \frac{\partial F_3}{\partial x} dz \right.$$

ஆனல், $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}$

$$\therefore \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = F_1(x, y, z_0) + F_1(x, y, z_0)\Big|_{y_0}^{y}$$

$$+ F_1(x, y, z_0)\Big|_{z_0}^{z} = F_1(x, y, z)$$

$$\therefore \quad \mathbf{F} = F_1\, i + F_2\, j + F_3\, k$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\, i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\, j + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\, \mathbf{k}$$

$$= \nabla\varphi$$

இவ்வாறு $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ என்பது $\mathbf{F}$ என்பது காப்பு மண்டல வெக்டராக இருக்கத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நியதியாகும்.

கணித பௌதிகத்தில் (in Mathematical physics) சுழலில்லா வெக்டரை (irrotational vector) $\mathbf{F} = -\nabla\varphi$ என உரைப்பது மரபு. அப்போது φ என்பது திசையிலியாகிய நிலைப் பண்பு (scalar potential) எனப்படும்.

கணக்கு: $\mathbf{F} = (2xy + z^3)\,\mathbf{i} + x^2 j + 3xz^2\, k$ என்பது விசை யானால், அது ஆற்றல் காப்பு விசை என நிறுவுக. (b) அவ்வாறெனின் நிலைப் பண்புச் சார் பலனைக் காண்க. (c) ஒரு துகளை $(1, -2, 1)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து $(3, 1, 4)$ எனும் புள்ளிக்கு விசை நகர்த்தினால் அது செய்யும் வேலை என்ன?

(a) $\mathbf{F}$ என்பது ஆற்றல் காப்பு விசையானால் (அல்லது விசையாக) $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ ஆகும்.

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xy^2 \end{vmatrix}$$

$$= i\,(0) + (3z^2 - 3z^2)\, \mathbf{j} + (2x - 2x)\, \mathbf{k} = 0$$

$\therefore$ $\mathbf{F}$ என்பது ஆற்றல் காப்பு விசையாகும்.

$$\mathbf{F}=\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}i+\frac{\partial\varphi}{\partial y}j+\frac{\partial\varphi}{\partial z}k \text{ எனின்}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2xy+z^3 \quad \therefore \quad \varphi=x^2y+xz^3+f(y,z)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=x^2 \quad \therefore \quad \varphi=x^2y \quad +g(x,z)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=3xz^2 \quad \therefore \quad \varphi=xz^3 \quad +h(x,y)$$

$$\therefore \quad =\varphi\; x^2y+xz^3+k \text{ (ஏதேனும் ஒரு நிலை எண்).}$$

[மாற்று வழி: நிரூபணத்தில் கண்ட முறையையும் பின் பற்றலாம்.]

$$\varphi(x,y,z)=\int_{x_o}^{x}(2xy_o+z_o^3)\,dx\int_{y_o}^{1}x^2\,dy+\int_{z_o}^{z_1}3xz^2\,dz$$

$$=(x^2y_o+z_o^3x)\Big|_{x_o}^{x}$$

$$+x^2y\Big|_{y_o}^{y}+xz^3\Big|_{z_0}^{z}$$

$$=x^2y+xy^3+\text{ நிலை எண்.}$$

குறிப்பு 1: இதிலிருந்து நாம் அறிவது $(x_o y_o z_o)$ எனும் புள்ளியை மாற்றினால் φ (x, y, z)–ல் நிலை எண் மட்டுமே மாறு கிறது. ஆகையால் $\nabla\varphi$ மாறாது எனத் தெரிகிறது.

குறிப்பு 2: ஆகவே மேற்கூறிய கணக்கில் (0,0,0) எனும் புள்ளியை $(x_o y_o z_o)$ எனும் புள்ளிக்குப் பதிலாகக் கொண்டால், இன்னும் எளிதாக φ (x, y, z) காண முடியும்.

கணக்கு 2 : $\mathbf{F} = 2xz\,i + 2yz^2\,\mathbf{j} + (x^2 + 2y^2 z - 1)\,\mathbf{k}$ என்றால் (a) அது காப்புமண்டல வெக்டரெனக் காட்டி (b) மண்டலத்தின் நிலைப் பண்புச் சார் பலனைக் காண்க.

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xz & 2yz^2 & x^2 + 2y^2 z - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (4y - 4y)\,i - (2x - 2x)\,j + 0\mathbf{k} = 0$$

$\therefore$ **F** என்பது காப்பு மண்டல வெக்டராகும்.

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,i + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,j + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,\mathrm{k}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\varphi x} = 2xz \qquad \therefore \varphi = x^2 z + f(y, z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2yz^2 \qquad \therefore \varphi = y^2 z^2 + f(z\,x)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = x^2 + 2y^2 z - 1 \qquad \therefore \varphi = x^2 z + y^2 z^2 - z + f(x, y)$$

$\therefore \quad \varphi(x, y, z) = x^2 z + y^2 z^2 - z$ ஆகும்.

[மாற்று வழி $(0, 0, 0) - (x, 0, 0) - (x, y, 0) - (x, y, z$ எனும் பாதை வழி தொகை காண:

$$\varphi = \int_0^x F_1\,dx + \int_0^y F_2\,dy + \int_0^z F_3\,dz$$

$$= 0 + 0 + \int_0^z (x^2 + 2y^2\,3 - 1)\,dz$$

$$\varphi(x, y, z) = x^2 z + y^2 z^2 - z + \text{நிலை எண்}$$

கணக்கு : ஆற்றல் காப்பு விசை மண்டலத்தில் ஆற்றல் விசை $\mathbf{A} = -\nabla \varphi$ (φ நிலைப் பண்பு) விசை செயல்பட ஒரு துகளின் திசை வேக அளவு V_A-லிருந்து V_B-க்கு மாறுகிறது. அதன் நிலை A-லிருந்து B-க்கு மாறுகிறது என்றால்,

$\varphi(A) + \frac{1}{2} mV_A^2 = \varphi(B) + \frac{1}{2} mV_B^2$ எனக் காண்க.

தீர்வு : துகளின் நிலைவெக்டர் 't' நேரத்தில் $\mathbf{r}$ ஆகுக.

$$\therefore \quad \mathbf{F} = m \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

$$\mathbf{F} \cdot \frac{dt}{dt} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2$$

$$\therefore \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \frac{m}{2} d\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{m}{2} \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^2 \Bigg|_{V_A}^{V_B}$$

$$= \frac{m}{2} (V_B^2 - V_A^2)$$

ஆனால் $\mathbf{F} = -\nabla\varphi$

$$\therefore \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_A^B \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = -\int_A^B d\varphi = -\varphi\Big|_A^B$$

$$\therefore \int_A^B \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \varphi(A) - \varphi(B)$$

$$\therefore \quad \varphi(A) - \varphi(B) = \frac{m}{2}V_B^2 - \frac{m}{2}V_A^2$$

$$\therefore \quad \varphi(A) + \frac{m}{2}V_A^2 = \varphi(B) + V_B^2$$

குறிப்பு : $\varphi(A)$ என்பது நிலை ஆற்றல் $\frac{1}{2} m V^2$ என்பது இயங்கு ஆற்றல். ஆகவே,

A எனும் இடத்தில் உள்ள மொத்த ஆற்றல் $= B$ எனும் இடத்தில் உள்ள மொத்த ஆற்றல்.

அதாவது விசை மண்டலத்தில் இயங்கும் துகளின் மொத்த ஆற்றல் மாறுதுள்ளது. அதனுல் இஃது ஆற்றல் காப்பு மண்டலம் என வழங்கப்படுகிறது.

3.10. தல நுண்தொகை: (Surface Integral)

$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ என்பது வரை நுண் தொகை என்று சொன்னேம். அதுபோன்று ஒரு தலத்தின் சமன்பாடு,

$x = x(u, v)$ $y = y(u, v)$ $z = z(u, v)$ எனின் தலத்தின் சமன்பாட்டை $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ என வெக்டர் சமன்பாட்டால் தொகுத்துக் கூறலாம். $[\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}]$. $\mathbf{A}$ எனும் வெக்டர் தலத்தின் மீதுள்ள புள்ளிகளின் சார்பலனுகுக. தலத்தின் ஒரு பகுதி S ஆகுக. அதை M மிக நுண்ணிய பரப்புகளாகப் பிரிக்கவும். ஒன்றை ΔS_ρ என்போம் $(\rho=1, 2 \ldots M)$. ΔS_ρ ல் P_ρ எனும் புள்ளியைக் காண்போம். அதன் கூறுகள் $(x_\rho\ y_\rho\ z_\rho)$ ஆகுக. அங்கு $\mathbf{A}$-ன் மதிப்பு $A(x_\rho\ y_\rho\ z_\rho)$. அங்கு அலகுச் செங்கோடு தலத்திற்கு $\mathbf{n}_p$ ஆகுக.

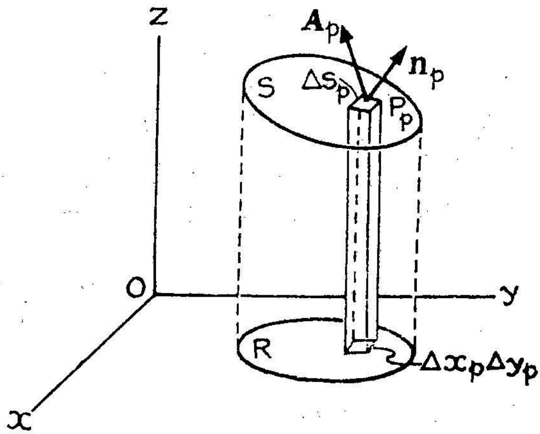
$\sum_{\rho=1}^{M} = \mathbf{A}_\rho\cdot\mathbf{n}_p\,\Delta S_\rho$ எனும் தொகையைக் கொள்க. $M \to \infty$ ஆகும்போது இத்தொகைக்குத் திட்டமான எல்லே இருந்தால், S எனும் பகுதி மேல் கொண்ட $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,ds$ எனும் தல நுண் தொகை (Surface Integral) எனப்படும். தலப் பரப்பை S எனக் குறிக்கிறேம்.

தல நுண்தொகையைக் கணக்கிட

S எனும் தலப்பரப்பின் xy எனும் தளத்தில் உள்ள வீழல் (Projetion) R ஆகுக. என்றுல் $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_R \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,\frac{dx\ dy}{|\mathbf{n}\cdot\ \mathbf{k}|}$ என நிறுவுவோம்.

$$\iint \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,ds = \mathop{\mathcal{L}t}_{M\to\infty} \sum_{\rho=1}^{M} \mathbf{n}_p\cdot\mathbf{n}_p\,\Delta S_\rho \text{ என்றேம்.}$$

ΔS_p-ன் xy தளத்தில் விழல் $|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k}| \Delta S_p$ ஆகும்.



படம் 18.

[$(\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k})$ என்பது ΔS_p பரப்பிற்கும், xy தளத்திற்குமுள்ள கோணத்தின் கோசைன் விகிதமாகும்.]

இது $\Delta x_p \Delta y_p$ எனும் பரப்பிற்குச் சமம்.

$\therefore \quad \Delta S_p = \dfrac{\Delta x_p \, \Delta y_p}{|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k}|}$ [இதில் இரண்டிற்கு மேற்பட்டபடி நுண் அளவுகள் விடப்பட்டன.]

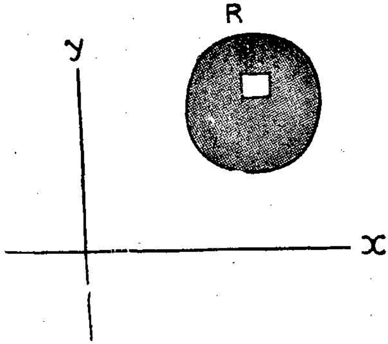
$$\therefore \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \; ds = \sum_{p-1}^{M} \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}_p \cdot \frac{\Delta x_p \; \Delta y_p}{|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{k}|}$$

$$\underset{M \to \infty}{=} \iint_{\mathbf{R}_M} A \cdot \mathbf{n} \frac{dx\,dy}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}$$

இவ்வாறு தலப்பரப்பின் சமதளத்தில் உள்ள வீழலினால் தல நுண் தொகை காண்கிறோம்.

இதுபோலவே $\displaystyle\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_r \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dy\,dz}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}|} = \iint \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dz\;dx}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}|}$

என மற்ற yz, zx தளத்தில் உள்ள வீழலைக் கொண்டும் காணலாம்.



படம் 14.

குறிப்பு:

(i) R என்பது xy தளத்தில் ஒரு பரப்பானல் $\iint\limits_R dx\,dy$ என்பது 'R' ன் பரப்பைத் தரும்.

(ii) $\iint\limits_R x\,dx\,dy =$ பரப்பு $\times$ $\mathbf{x}$ ஆகும்.

($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ என்பது R-ன் புவியீர்ப்பு மையம் அல்லது திணிவு மையம்).

(iii) $\iint\limits_R y\,dx\,dy =$ பரப்பு $\times$ $\mathbf{y}$ ஆகும்.

(iv) $\iint\limits_R x^2\,dx\,dy =$ y அச்சைச் சார்ந்த பரப்பின் நிலைம நெம்பு திறன்.

(v) $\iint\limits_R y^2\,dx\,dy =$ x அச்சைச் சார்ந்த பரப்பின் நிலைம நெம்பு திறன்.

இவை சாதாரணப் பரப்புக்களுக்குத் தெரிந்த விஷயங்களாதலால், இவற்றைத் தல நுண்தொகை காணப் பயன்படுத்தலாம்,

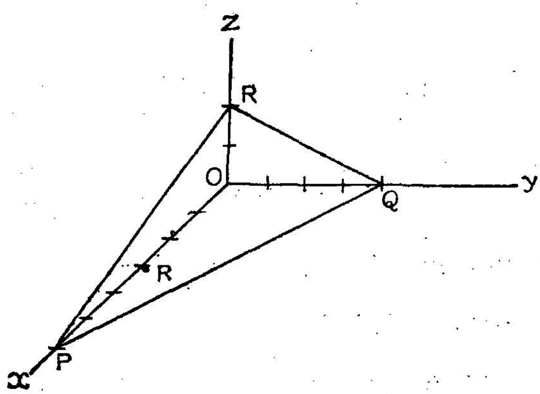
$$\mathbf{n}\, ds = \frac{\mathbf{n}\, dx\, dy}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|} = \frac{\mathbf{n}\, dy\, dz}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}|} = \frac{\mathbf{n}\, dz\, dx}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}|}$$ என்பதை
கவனத்தில் வைக்கவும்.

$$\therefore \iint_S \varphi\, \mathbf{n}\, ds = \iint_R \varphi\, \mathbf{n} \frac{dx\, dy}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|}$$ ஆகும்.

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds = \iint_R \nabla \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} \frac{dx\, dy}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|}$$ ஆகும்.

[R என்பது S-ல் xy தளத்தில் வீழல்]

கணக்கு: $A = 18z\, \mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3y\, \mathbf{k}$ S என்பது $0x, 0y, 0z$ அச்சுகளுக்குள் அடங்கியிருக்கும் $2x+3y+6z=12$ எனும் தளத்தின் பகுதி என்றால் $\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, ds$ ஐக் கணக்கிடுக.



படம் 15.

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, ds = \iint_R \cdot\mathbf{A}\mathbf{n} \frac{dx\, dy}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|}$$

(*i*) **n ஐக் கணக்கிட:**

தலச் சமன்பாடு $2x+3y+6z-12=0$ $\varphi(x, y, z) = 0$ என்போம்.

அதன் செங்கோட்டு திசை

வெக்டர் $\nabla \varphi = \frac{\partial}{\partial x}(2x)\, i + \frac{\partial}{\partial y}(3y)\, \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(6z)\mathbf{k}$

$$= 2i + 3\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k}$$

[இது நாம் அறிந்ததே.]

$$\therefore \quad \mathbf{n} = \frac{2i+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{2}{7}i + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

$$\therefore \mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = \frac{6}{7}$$

(ii) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} = (18\,z\,i - 12\,j + 3y\,\mathbf{k}) \cdot \frac{(2\,i+3j+6k)}{7}$

$$= \frac{36z}{7} - \frac{36}{7} + \frac{18\,y}{7} = \frac{18}{7}\ (2z-2+y)$$

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, ds = 3\iint_R \frac{18}{7}\,(2z-2+v)\cdot\frac{7}{6}\, dy\, dy$$

$$= 3\iint_R (2z-2+y)\, dx\, dy$$

இங்கு 'R' என்பது $O\ P\ Q$ எனும் முக்கோணம்.

P என்பது $(6, 0, 0)$

Q என்பது $(0, 4, 0)$

இதன் பரப்பு = 12 ச.அலகு.

$$x=2 \qquad y=\tfrac{4}{3} \qquad z=0$$

(i) $\iint_R 2z\, dx\, dy = 0$ [2 z × பரப்பு]

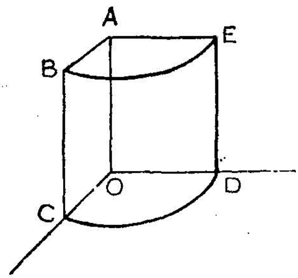
(ii) $-\iint_R 2dx\, dy = -\ 2\times$ பரப்பு $= 2\times 12 = -2\,4$ ச. அலகு.

(iii) $\iint y\, dx\, dy = y \times$ பரப்பு $= \frac{4}{3} \times 12 = 16$ ச. அலகு

$$\therefore \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, ds = 3\,[-24+16] = \underline{\underline{-24}}$$

கணக்கு: $x^2+y^2=16$ எனும் உருளையின் வளை தலப் பரப்பை OX, OY, OZ அச்சுகளுக்கிடையேயும், $z=0$, $z=5$ எனும் தளங்களுக்கிடையேயும் கொள்க. இதன் மேல் $\iint \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, ds$-ன் மதிப்பை $A = z\,i + z\,j\;3y^2z\,\mathbf{k}$ என்றால், கணக்கிடுக.

தீர்வு: வளை தலப் பரப்பை $x\,y$ தளத்தில் வீச்சிட்டால் $C\,D$ எனும் வில் மட்டும் வருகிறது. ஆகவே, $x\,z$ தளத்தில் வீச்சிடுக. அது $OABC$ எனும் செவ்வகம் ஆகும். $OC=4$; $OA=5$.



படம் 16.

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_R \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, \frac{dx\, dz}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}|}$$

$\mathbf{n}$. என்பதன் திசை $\nabla\,(x^2+y^2)$-ன் திசை

$$= 2\,x\,i + 2\,y\,j$$

$$\therefore \quad \mathbf{n} = \frac{2\,x\,i + 2\,y\,j}{\sqrt{4\,x^2 + 4\,y^2}} = \frac{2\,x\,i + 2\,y\,\mathbf{j}}{8} = \frac{x\,i + y\,\mathbf{j}}{4}$$

$$|\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}| = \frac{y}{4}\,;$$

$$\therefore \quad \mathbf{A} = z\,i + x\,j - 3y^2z\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{n} = \frac{x\,i + y\,\mathbf{j}}{4}$$

$$\therefore \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \frac{xz + x\,y}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}|} = \frac{xz+xy}{y}$$

$$\iint_R \frac{xz+xy}{y}\,dx\,dz = \int_{z=0}^{5}\int_{x=0}^{4}\left(\frac{xz}{y}+x\right)dx\,dz$$

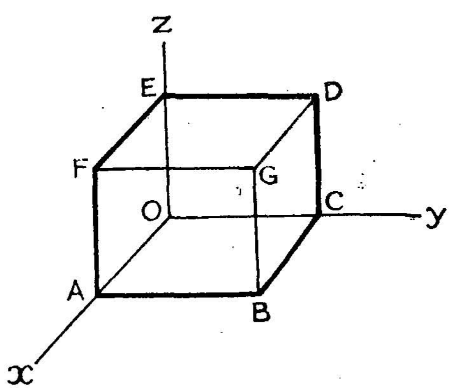
$$= \int_{z=0}^{5}\int_{x=0}^{4}\left(\frac{xz}{\sqrt{16-x^2}}+x\right)dx\;dz$$

$$= \int_{z=0}^{5}(4z+8)\,dz$$

$$= 90$$

கணக்கு: $\mathbf{F} = \triangle\, x y\, i - y^2\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$ என்றால், $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\;ds$-ன் மதிப்பை $x=0\; x=1,\; y=0\; y=1,\; z=0\; z=1$ எனும் கன சதுரப் பரப்பின் மேல் காண்க.

தீர்வு: (1) $ABCO$ என்ற பக்கத்தில்



படம் 17.

$\mathbf{n} = -\mathbf{k}$

$z=0$

$\therefore \quad F = -y^2 j$

$\therefore \quad F \cdot n = 0$

$\therefore$ நுண் தொகை $\underline{\underline{=0}}$

(ii) OCDE என்ற பக்கத்தில் $x=0; \quad n=-i$

$\therefore \quad F = (-y^2 i + y z k) \qquad \therefore \quad F \cdot n = 0$

நுண் தொகை $=0$

iii) O EFA என்ற பக்கத்தில் $y=0 \quad n=-j$

$\therefore \quad F = 4x z i \qquad F \cdot n = 0$

நுண் தொகை $=0$

(iv) GDEF என்ற பக்கத்தில் $z=1, \quad n=k \quad ds=dx\ dy$

$$\therefore \iint F \cdot n = \iint (4 x i - y^2 i + y k)\, dx\, dy$$

$$= \iint y\, dx\, dy \qquad = \Delta\ y = 1 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

(v) ABGF என்ற பக்கத்தில் $x=1 \quad n=i \quad ds=dy\ dz$

$\therefore$ நுண் தொகை $= \iint 4 z\, dy\, dz = 4\Delta = 4 \times \tfrac{1}{2} = 2$

(vi) BCDG என்ற பக்கத்தில் $y=1 \quad n=j \quad ds=dy\ dx$

$\therefore$ நுண் தொகை $= \iint dz\, dx \qquad = -1$

$\therefore$ மொத்த நுண் தொகை $= 1/2 + 2 - 1 = \underline{\underline{3/2}}$

கன நுண் தொகை : V எனும் கொள்ளளவிற்குள் $P_k\ (x_k\ y_k\ x^k)$ ஒரு புள்ளியாகுக. அதைச் சுற்றி $\Delta x_k\ \Delta y_k\ \Delta z_k$ எனும் கனச் செவ்வகம் கொள்க. இவ்வாறு V ஐ M கனச்

செவ்வகங்களாகப் பிரிக்கவும். P_k ஐச் சுற்றி கனச் செவ்வகத்தின் கன அளவு V_k ஆகுக. $\phi\ (x, y, z)$ எனும் ஒரு திசையிலிச் சார்பலனின் மதிப்பு P_k-ல் $\phi\ (x_k\ y_k\ z_k)$.

$\sum_{K=1}^{M} \phi\ (x_k\ y_k\ z_k)\ \Delta V_k$ எனும் தொகை $M \to \infty$ ஆகும் போது — அதாவது $\Delta V_k \to 0$ ஆகும்போது — ஓர் எல்லையை அணுகட்டும். அது V எனும் கொள்ளளவில் $\phi\ (x, y, z)$-ன் கன நுண் தொகை எனப்படும். அதை $\iiint_V \phi\ dv$ எனக்குறிப்பர்.

கனச் செவ்வகங்களைத் தொகுக்கும்போது $\Delta x\ \ \Delta y$ மேல் உள்ள கன செவ்வகங்களை Δz மாறும்படி z அச்சுத் திசையில் தொகுக்கவும். அதாவது $x,\ y$ மாறிலியாகக் கொண்டு z ஐச் சார்ந்த நுண் தொகையை z-ன் எல்லைக்குள் காணவும். பிறகு y ஐ மாறச் செய்யவும். பிறகு x ஐ மாறச் செய்யவும். இவ்வாறு முடிவில் வருவது கன நுண் தொகையாகும்.

(எடுத்துக்காட்டு) $4x + 2y + z = 8,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ எனும் தளங்களுக்கு உள்ள கொள்ளளவில் $\phi = 45\, x^2 y$ எனின்

$\iint_V \phi\ d\ v$ காண்க.

[$z = 8 - 4x - 2y$

ஆகவே முதலில் Δ=-லிருந்து $8\Delta x - 2y$ எனும் வரைதொகை காணவேண்டும். இவ்வாறு $d\,x\ d\,y$ எனும் பரப்பின் மீது z உயரம் உள்ள கனச் செவ்வகம் வரும். பிறகு y அச்சுக்கு இணையாக இவற்றை அடுக்கவேண்டும் ($x\ y$ தளத்தில்). அப்போது $2y + 4x = 8$ அல்லது $y = 0$ லிருந்து $4 - x$ வரை y மாறும், பிறகு x அச்சுக்கு இணையாக $x = 0$ லிருந்து $4x = 8$ அதாவது $x = 2$ வரை மாறும்.]

கன நுண் தொகை

$$\iiint \phi\ dv = \iint_{x=0}^{2} \iint_{y=0}^{4-x} \int_{z=0}^{8-4x-2y} 45\, x^2 y\ d\,z\ d\,y\ d\,x$$

$$= \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{4-x} 45\, x^2 y\,(8 - 4x - 2y)\, dy\ dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} \frac{45}{3}\, x^2\, ((4-2x)^3\, dx$$

$$= \underline{\underline{128}}$$

பயிற்சி

1. $\mathbf{F} = (2x + y)\,\mathbf{i} + (3y - x)\,j$ என்றால்

$\int_c \mathbf{F}.\, d\mathbf{r}$.ன் மதிப்பைக் கீழ்க்கண்ட நியதிக்குட்பட்டுக் காண்க:

C எனும் வரை (0, 0) — (2, 0) — (3, 2) எனும் நேர்கோடு களால் ஆன பாதை. (விடை 11)

2. ஒரு விசை $\mathbf{F} = 3x^2\, i + (2xz - y)\, j + z k$ ஒரு துகளின் மேல் செயல்பட கீழ்காணும் பாதைகளில் இயங்கினால் விசை செய்த வேலையைக் கணக்கிடு.

(i) (0, 0, 0) — (2, 1, 3) எனும் நேர்கோடு

(ii) $x = 2t^2\quad y = t\quad z = 4t^2 - t$ எனும் வரை.

$t = 0$ லிருந்து $t = 1$ எனும் புள்ளி வரை.

(iii) $x^2 = 4y\quad 3x^3 = 8z$ எனும் வரை.

$x = 0$ லிருந்து $x = 2$ வரை, [(i) 16 (ii) 14 . 2 (iii) 16]

3 $\oint_c \mathbf{F}.\, di$ என்பதில் $\mathbf{F} = (x - 3y)\, i + (y - 2x)\, j$

c என்பது $x = 2\cos t\quad y = 3\sin t$ எனும் முழு நீள்வட்டம் [$t = 0$ லிருந்து $t = 2\pi$ வரை] (விடை: 6π)

4. $y^2 = x,\ y = x^2$ என்பவை அடக்கும் பரப்பின் பகுதி c எனவும் $A = (x-y)\, i + (x+y)\, j$ எனவும் ஆக $\oint_c \mathbf{A}.\ d\mathbf{r}$ - ன் மதிப்பைக் காணவும். (விடை: $\frac{2}{3}$)

5. $\mathbf{A} = (4xy - 3x^2 z^2)\, i + 2x^2 j - 2x^3 j\, \mathrm{k}$ என்றால்,

$\int_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$-ன் மதிப்பு பாதையைச் சாராதது என நிறுவுக.

$A = \nabla \varphi$ எனும் படியான φ எனும் திசையிலிச் சார்பலன் உண்டு எனக் காட்டுக.

'φ' எனும் சார்பலனைக் கணக்கிடுக. $[\varphi = 2x^2 y - x^3 z^2 + c]$

6. $\mathbf{F} = (y^2 \cos x + z^3)\, i + (2y \sin x - 4)\mathrm{j} + (3x z^2 + 2)\mathrm{k}$ என்பது ஆற்றல் காப்பு விசை என நிறுவுக. அவ்வாறெனின் ஆற்றல் காப்பு மண்டலத்தின் நிலைப் பண்பு என்ன? (0, 1—, 1) லிருந்து $\left(\frac{\pi}{2}, -1, 2\right)$ வரை ஒரு துகளை இயக்கும்போது விசை செய்த வேலை என்ன?

$[\varphi = y^2 \sin x + x z^3 - 4y + 2z + c;\ 15 + 4\pi]$

7. கணக்கிடுக : $\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, ds$

(a) S என்பது($x=0$, $y=0 z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ எனும் பக்கங்களையுடை கன சதுரம்.

(b) (0, 0, 0) ஐ மையமாகவும் 'a' நீளம் ஆரமுள்ள கோள தலப் பரப்பு. [(a) 3 (b) $4\pi a^3$]

8. $A = 4x i + xyz^2 j + 3z \mathbf{k}$ என்றால்

$\iiint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, ds$-ன் மதிப்பை $z^2 = x^2 + y^2$ எனும் கூம்பும் $z = 4$ எனும் தளமும் அடங்கிய முழுப்பரப்பின் மீது காண்க.

[320π]

9. $\iiint_V (2x + y)\, dV$-ன் மதிப்பைக் காண்க. இங்கு V என்பது $z = 4 - x^2$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$ என்பவை அடக்கிய கொள்ளளவு. $\left[\frac{80}{3}\right]$

10. $F = (2x^2 - 3z)\,\mathbf{i} - 2xy\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}$ என்றால்,

(i) $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$

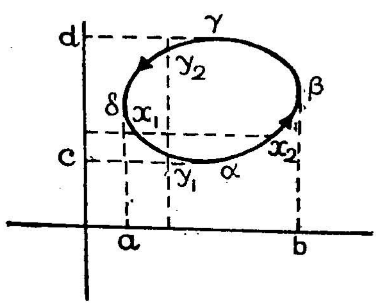
(ii) $\iiint_V \nabla \times \mathbf{F}\, dV$ என்பதை $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $2x + 2y + z = 4$ எனும் தளங்கள் அடக்கிய கொள்ளளவில் காண்க.

4. கிரீன், ஸ்டோக்ஸ், கவுஸ் தேற்றங்கள்

(Theorems of Green, Stokes and Gauss)

4.1. தளத்தின் கிரீன் தேற்றம் : (Green's Theorem in the plane)

ஒரு மூடிய வரையால் ஒரு தளத்தில் அடக்கப்பட்ட பரப்பு R ஆகுக. வரையில் செல்லும் போது பரப்பு இடப் பக்கமாகவே இருந்தால் அது நேர்த் திசையில் (Positive side) செல்லுதல் எனப்படும். ஆகவே படம் (18)-ல் வரையை இடமாகச் சுற்றுதல் நேர்த் திசையாகும்.



பட 18.

கிரீன் தேற்றம் : அச்சுகளுக்கு இணையாக வரையப்படும் இரண்டு இடங்களுக்கு மேல் வெட்டாத மூடுவரை ஆகுக. அது அடக்கிய பரப்பு K-ல் $P(x, y)$, $Q(x, y)$ $\frac{\partial P}{\partial y}$ $(=Px)$ $\frac{\partial Q}{\partial x}$ $(= Qx)$ தொடர்ச்சியுடையதாக இருக்கட்டும். அப்போது,

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

ஆகும். [வரை நுண் தொகை நேர்த் திசையில் கொள்ள வேண்டும்]

நிரூபணம் : சாதாரண ஒழுங்கு வரை c ஆகுக.

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy \text{ எனும்}$$

நுண் தொகையை முதலில் yஐ நிலையாகக் கொண்டு xஐ $x = x_1(y)$-லிருந்து $x = x_2(y)$ வரை மாறும் போது காண்போம். பிறகு yஐ $y = c$-லிருந்து d வரை மாற்றுவோம். (படம் 18 காண்க.)

$$\therefore \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx$$

$$= \int_c^d \left[Q(x_2, y) - (Q\,x_1, y)\right] dy$$

$$\int_c^d Q(x_2, y)\,dy + \int_d Q(x_1, y)\,dy$$

அப்போது இந்த நுண் தொகை வரையின் மீது $\alpha\beta\gamma$ எனும் வில் மீது முதல் நுண் தொகையும், தொடர்ந்து $\gamma\delta\alpha$ எனும் வில் மீது இரண்டாவது நுண் தொகையும் காணப் படுகிறது.

$$\therefore \text{ கூடுதல் } = \oint_c Q(x_1, y)\,dy$$

$$\text{இதே போல } \iint \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy$$

$$= \int_a^b P(x, y_2)\, dx - \int_a^b P(x, y_1)\, dx$$

$$= -\int_a^b P(x, y_1)\, dx + \int_b^a P(x_1, y_2)\, dx$$

$$= -\int_c P(x, y)\, dx$$

$$\therefore \iint \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int_c P(x, y)\, dx.$$

$$\therefore \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_c P\, dx + Q\, dy$$

வெக்டர் குறியீட்டில் கிரீன் தேற்றம் (தளத்தில் மட்டும்)

$P(x, y)$, $Q(x, y)$ இரு சார் பலன்கள்

$\mathbf{F} = Pi + Qj + O\mathbf{k}$ என்போம்.

$$\nabla \times \mathbf{F} = Oi + Oj + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

வரையின் அலகுத் தொடு கோட்டு வெக்டர்

$$T = \frac{dx}{ds} i + \frac{dy}{ds} j + O\mathbf{k}$$

$$\therefore \int_C P\, dx + Q\, dy = \int \quad . T\, ds$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint \mathbf{k} \cdot \nabla \times dA$$

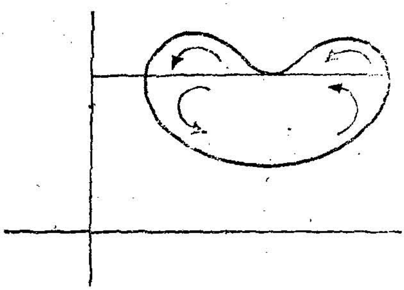
$$\therefore \text{ கிரீன் தேற்றம் } \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint P\, dx + Q\, dy$$

என்பது வெக்டர் குறியீட்டில்

$$\iint_R \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F}\, dA = \int_C \mathbf{F} \cdot T\, ds$$

என வருகிறது. [k என்பது தளத்திற்குக் குத்தான அலகு வெக்டர்]

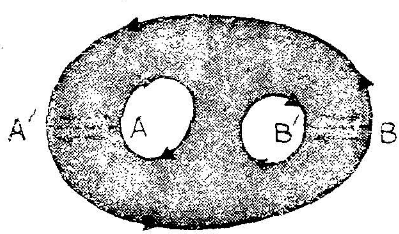
குறிப்பு (i) : அச்சுகளுக்கு இணையான கோடுகள் இரண்டு புள்ளிகளுக்கு மேல் மூடு வரையை வெட்டினாலும் அது ஒழுங்கு வரையானால், தேற்றம் பொருந்தும். ஏனெனில்,



படம் 19.

பரப்பைப் பாகங்களாகப் பிரித்து ஒவ்வொன்றையும் இரண்டு புள்ளிகளுக்கு மேல் வெட்டாதனவாகச் செய்யலாம். (படம் 19) பார்க்கவும்.

குறிப்பு (ii): பல வரைகள் மூடிய பரப்பெனின் (Multiply connected region) சிறு வெட்டுக்களால் (cuts) ஒரு மூடி வரை



படம் 20.

பரப்பாக்கலாம் (Simply connected region). படத்தில் கோடிட்ட பாகம் பரப்பு. AA' BB' என்பவை வெட்டுகள். வரையில் செல்லும் திசை அம்புக் குறியால் காட்டப்பட்டுள்ளது.

கணக்கு :

கிரீன் தேற்றத்தினால் $\frac{1}{2} \oint x\, dy - y\, dx =$ பரப்பு A எனக் காண்க.

இங்கு $P = -\frac{y}{2}$ $Q = \frac{x}{2}$ என்றால்

$$P\,dx + Q\,dy = \tfrac{1}{2}\,(x\,dx - y\,dx);\; Qx = \tfrac{1}{2}\,Px - \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore\ \tfrac{1}{2} \oint x\ dy - y\,dx = \iint dx\,dy = A.$$

என வருகிறது.

கணக்கு :

$\oint x^2\,dy - y^2\,dx = 2\,A\ (\mathbf{x} + \mathbf{y})$ எனக் காட்டு. இங்கு $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ என்பது பரப்பு A-ன் திணிவு மையம் (Centre of mass).

தீர்வு $P = -y^2$ $\qquad Q = x^2$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2\,y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2\,x$$

$$\therefore\ \oint x^2\ dy - y^2\ dx = 2 \iint (x + y)\,dx\,dy$$

$$= 2 \iint x\ dx\ dy + 2 \iint y\ dx\,dy$$

$$= 2\ A\mathbf{x} + 2\,A\,\mathbf{y}$$

$$\therefore\ \oint x^2\,dy - y^2\,dx = 2\,A\,(\mathbf{x} + \mathbf{y})$$

கணக்கு :

$\frac{1}{3}\oint x^3\ dy - y^3\ dx$ என்பது தளத்திற்கு ஆதியில் குத்தாகவுள்ள அச்சைச் சுற்றிய நிலைம திருப்புத்திறன் எனக் காட்டு.

$$P = -y^3 \quad Q = x^3$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -3y^2 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{3}\oint x^3\,dy - y^3\,dx = \frac{1}{3}\iint (3x^2 + 3y^2)\,dx\,dy$$

$$= \iint (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

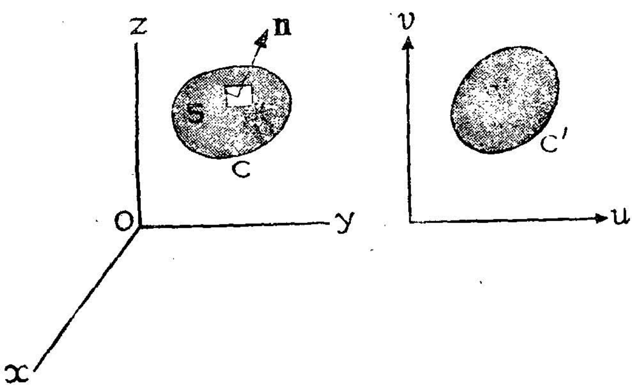
= ஆதியில் குத்தாகவுள்ள z அச்சைச் சார்ந்த பரப்பின் நிலைம திருப்புத் திறன் I_z (M.I about z axis)

ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம்: S எனும் தலத்தின் மேல் **F** என்பது ஒரு புள்ளி வெக்டர் சார்பலன் ஆகுக. S எனும் தலம், இரு பக்கங்களுடையதும் ஒழுங்கானதும் தள தலமாகுக. தலத்தின் எல்லை வரை (தலப்பரப்பை அடக்கும் வரை) C ஆகுக என்றால்,

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{F}\,ds = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

இது ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம் எனப்படும்.

நிருபணம்:



படம் 21.

(S எனும் தலப் பரப்பு, u. v தளத்தில் S' எனும் தளப் பரப்பாக ‘மாற்றம்'' அடைந்துள்ளது (mapped or transformed).

S எனும் தலத்தின் சமன்பாடு $x = x(u,v)$ $y = y(u, v)$ $z = z(u, v)$ ஆகுக. ஆகவே (u,v)-ன் மதிப்புக்கு S-ல் உள்ள புள்ளிக்கு (u,v) தளத்தில் ஒரு புள்ளியுள்ளது. இவ்வாறு S எனும் தலப் பரப்பு (பொது வெளியில் உள்ளது) u, v தளத்தில் S′ ஆக 'மாற்ற'மடைகிறது. [$(x, y, z) \longleftrightarrow (u, v)$].

$$\mathbf{n}\, ds = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\, du\, dv \text{ ஆகும்.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_u = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \\ \mathbf{r}_v = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \end{array} \right\}$$

$$\therefore \iint_S \mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{F}\, ds = \iint_{S'} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \cdot \nabla \times \mathbf{F}\, du\, dv$$

S'-ன் எல்லை வரை C' என்பது S ஐ அடக்கிய C-ன் உருவ மாற்றம் (image) ஆகும்.

$$\text{ஆனால் } d\,\mathbf{r} = (\mathbf{r}_u\, du\ \ \mathbf{r}_v\, dv) \quad .$$

$$\therefore \oint_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F}\, (\mathbf{r}_u\, du + \mathbf{r}_v\, dv)$$

$$\therefore \oint_{C'} (\mathbf{r}_u\, du + \mathbf{r}_v dv)\, \mathbf{F} = \iint_{S'} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \cdot \nabla \times \mathbf{F}\, du\, dv$$

என நிரூபித்தால் ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம் நிரூபணமாகும்.

[தளத்தின் கிரீன் தேற்றத்தையும்

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (a \cdot c)\ (b \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})\ (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

எனும் ஆத்திரத்தையும் பயன்படுத்துவோம்].

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{i} \times F_x + \mathbf{j} \times F_y + \mathbf{k} \times F_z$$

$\therefore\ \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \cdot \nabla \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_u \times r_v) \times (\mathbf{i} \times \mathbf{F}_x) +$ இது போன்ற 2 உறுப்புகள்

ஆனால் $\mathbf{r}_u \cdot i = x_u;\ \mathbf{r}_v \cdot i = x_v = (\mathbf{r}_x \cdot i)(\mathbf{r}_v \cdot F_x) - (\mathbf{r}_v \cdot i)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_x)$

$$\begin{aligned} \therefore\ \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \cdot \nabla \times \mathbf{F} = {} & x_u\, \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{F}_x - x_v\, r_u \cdot \mathbf{F}_x + \\ & y_u\, \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{F}_y - y_v\, \mathbf{r}_u \cdot F_y + \\ & z_u\, \mathbf{r}_v \cdot F_z - z_v\, \mathbf{r}_u \cdot F_z \end{aligned}$$

$$= \mathbf{r}_v \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}\right]$$

$$= \mathbf{r}_u \cdot \left[\frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}\right]$$

$$= \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{F}_u - \mathbf{r}_u \cdot F_v$$

$$= (\mathbf{r}_v \cdot F)_u - (\mathbf{r}_u \cdot F)_v \quad [\because \mathbf{r}_{uv} = \mathbf{r}_{uv} \text{ ஆனால்}]$$

[கிரீன் தேற்றத்தில் $x = u;\ y = v,\ P = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{F},\ Q = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{F}$ எனப் பிரதியிட].

$$\iint_{S'} \left[(\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{F})_u - (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{F})_v\right] du\ dv = \oint_{C'} (\mathbf{r}_u \cdot F)\, du\, (\mathbf{r}_v \cdot F)\ dv$$

$$\therefore \quad \iint_{S'} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \cdot \nabla \times F\, du\ dv = \oint_{C'} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u\, du + \mathbf{r}_v\, dv)$$

இவ்வாறு $\iint_S \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{F}\, ds = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

என ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

குறிப்பு 1: சமதளப் பரப்பிற்குப் பொருந்திய கிரீன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி பரப்பு, வளைதலப் பரப்பாயினும் பொருந்தும் என மேலே காட்டப்பட்டுள்ளது.

குறிப்பு 2: $\iint_S \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{F}\, ds$ என்பதை

$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ எனவும் எழுதலாம்.

இங்கு $d\mathbf{s}$ என்பது வெக்டர் பரப்பாகும்.

குறிப்பு 3: இந்தத் தேற்றத்தின் மற்றொரு நிரூபணம் பிற்சேர்ப்பில் காணவும்.

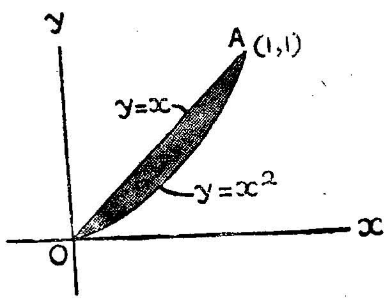
கணக்கு :

C எனும் வரை $y = x$, $y = x^2$ எனும் வரைகள் அடங்கிய பரப்பின் பரிதி வரை என்றால்,

$\oint (xy + y^2)\, dx + x^2\, dy$ என்பதைக் கொண்டு தளக் கிரீன் தேற்றம் சரி பார்க்கவும்.

தீர்வு :

$y = x$; $y = x^2$ எனும் வரைகள் $(1, 1)$ எனும் புள்ளியில் வெட்டுகின்றன.



படம் 22.

$\therefore y = x^2$ எனும் பாதையில் $\int (xy + y^2)\, dx + x^2\, dy$ கணக்கிட $x = t$, $y = t^2$ எனப் பிரதியிடவும்.

$$\therefore\ dx = dt \quad dy = 2t\, dt$$

$$\therefore \int (xy + y^2)\, dx + x^2\, dy$$

$$= \int (t^3 + t^4)\, dt + 2\, t^3\, dt$$

$$= \int_0^1 (3\, t^3 + t^4)\, dt = \frac{3\, t^4}{4} + \frac{t^5}{t}\Bigg|_0^1 = \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{5} = \frac{19}{20}$$

AO எனும் நேர் வரையில்

$$\int_1^0 (xy + y^2)\, dx + dy = \int_1^0 3x^2\, dx = x^3 \Big|_1^0 = -1$$

$$\therefore \oint (\quad) = \frac{19}{20} - 1 = -\frac{1}{20}$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x} x^2 - \frac{\partial}{\partial y}(xy + y^2)\right] dx\, dy$$

$$= \iint_R (x - 2y)\, dx\, dy = \int_0 x \int (x - 2y)\, dy$$

$$= \int_0^1 (xy - y^2) \Big|_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 (x^4 - x^3)\, dx$$

$$= \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{20}$$

இவ்வாறு தேற்றம் இரு முறையிலும் ஒரே மதிப்பு வருவதால் சரி பார்க்கப்பட்டது.

ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\oint_C \mathbf{A}\, d\mathbf{r} = 0$ ஆகத் தேவையும் போதுமானதுமான நியதி $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ என நிறுவுக.

போதுமானது எனக் காட்ட : $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ ஆகுக.

$$\therefore \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_s (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, ds$$

ஆனல் $\nabla \times \mathbf{A} = 0$

$$\therefore \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

தேவை எனக் காட்ட:

$\oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$ எனும் சமன்பாடு எல்லா மூடிய வரைகள் C-க்குப் பொருந்தட்டும். ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P-ல் $\nabla \times \mathbf{A} \neq 0$ என்போம்.

$\nabla \times \mathbf{A}$ என்பது தொடர்ச்சியுடைச் சார் பலன் எனக் கொண்டால் Pஐச் சுற்றிய S எனும் ஒரு சிறு மண்டலத்தில் $\nabla \times \mathbf{A} \neq 0$ ஆகும்.

அதாவது $\nabla \times \mathbf{A} = \alpha\, \mathbf{n}$ ஆகுக. α என்பது ஒரு நேரெண் மாறிலி. S-ன் பரிதிக் கோடு C ஆகுக.

$$\therefore \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint \nabla \times A s \cdot \mathbf{n}\, ds$$

$$= \alpha \iint \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}\, ds \quad > 0$$

$\therefore \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} > 0$ எனக் கொள்கைக்கு முரணுகிறது. எல்லா இடத்தும் $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ ஆக வேண்டும்.

பாய்வுத் தேற்றம் (Divergence Theorem)

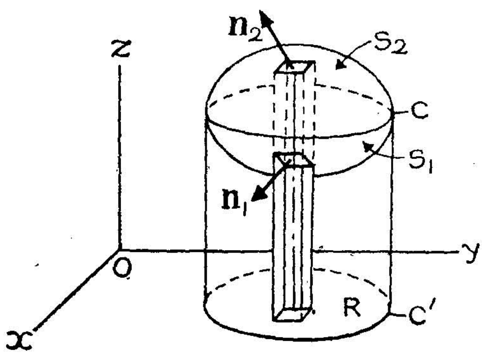
$\mathbf{F}(\mathbf{r})$ எனும் ஒரு புள்ளி வெக்டர் சார் பலன் மூடிய வளை தலப் பரப்படக்கிய கண மண்டலத்தில் வகைக் கெழுவுடைய தாக இருந்தால், அந்த மண்டலத்தில் $\mathbf{F}$ எனும் வெக்டரின்

பாய்வின் கன நுண்தொகை **F**-ன் புறத்தலப் பரப்பின், தல நுண்தொகைக்குச் சமமாகும்.

கணிதக் குறியீட்டில்

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$$

(V என்பது S எனும் தல மடக்கிய கன மண்டலமாகும்.)



படம் 23

நிருபணம் : S என்பது மூடு வளைதலம் (closed surface). அது அடக்கிய கன மண்டலம் V. Z அச்சுக்கு இணையாகவுள்ள கோடு Sஐ $P_1\,(x, y, z_1)$ எனும் புள்ளியிலும், $P_2\,(x, y, z_2)$ எனும் புள்ளியிலும் வெட்டட்டும். $z_1 = z_2$ எனும் படியான புள்ளிகள் S-ல் C எனும் வரையைத் தருகின்றன. இந்த வரை Sஐ S_2 எனும் மேல், பரப்பாகவும், S_1 எனும் கீழ்ப் பரப்பாகவும் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கின்றன.

பரப்பில் $d\mathbf{F}$ எனும் வெக்டரின் பிரிவுகள் F_1 F_2 F_3 ஆகுக.

$$\therefore \quad \mathbf{F} = F_1 i + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$$

$$\therefore \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

$$\iiint \nabla F\, dV = \iiint_V \frac{\partial F_1}{\partial x} dx\, dy\, dz + \iiint \frac{\partial F_2}{dy} dx\, dy\, dz$$

$$+ \iiint \frac{\partial F_3}{\partial z} dx\, dy\, dz$$

$$\iiint \frac{\partial F_3}{\partial z} dx\, dy\, dz = \iint_R dx\, dy \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial F_3}{dz} dz$$

[R என்பது S எனும் பரப்பின் $x\,y$ தளத்தின் மீதுள்ள வீழல்.]

$$= \iint_R F_3\,(x\,y\;z_2)\,dx\,dy - \iint_R (F_3\,(x, y, z_1)\,dx\,dy$$

மேல் பகுதியாகிய S_2-க்கு $dx\,dy = \mathbf{R}\cdot\mathbf{n}\,dS$.

ஆனல், கீழ்ப் பகுதியாகிய S_1-க்கு $dx\;dy = -\mathbf{R}\;\mathbf{n}\;dS$. ஏனெனில், ஒரு பகுதியில் செங்கோடு $\mathbf{n}$ $\mathbf{R}$ வெக்டருடன் குறுங் கோணத்திலாளுல் மற்றப் பகுதியில் விரி கோணமாகும். $\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}$ என்பது அவையடக்கிய கோணத்தின் கோசைன் விகித மாகையால், ஒன்றில் நேரெண்ணுளுல் மற்றதில் எதிரெண் ணுகும்.

$$\therefore \iint F_3\,(x\,y\,z_2) dx\,dy \iint_R = F_3\,(x, y, z_1)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{S_2} F_3\,\mathbf{K}\cdot\mathbf{n}\;dS + \iint_{S_1} F_3\,\mathbf{K}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$$\therefore \iiint \frac{\partial F_3}{dz}\,dV = \iint_S F_3\,\mathbf{K}\cdot\mathbf{n}\;dS$$

இதே போல,

$$\iiint_V \frac{\partial F_1}{dz}\,dV = \iint_S F_1\,i.\mathbf{n}\;ds;\; \iiint_V \frac{\partial F_2}{\partial y}\,dV = \iint_S F_2\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,d\,S$$

$$\therefore \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dV = \iint_S (F_1\,\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}).n\, dS$$

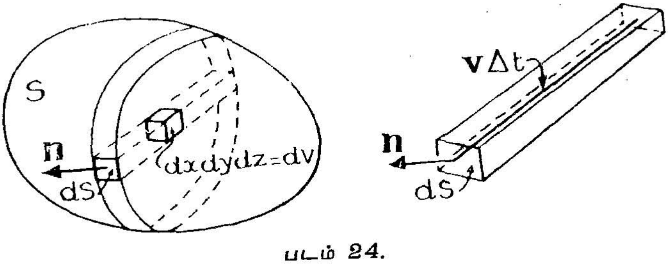
$$\therefore \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, ds.$$

குறிப்பு: மேற்கூறியது கூறு அச்சுகளுக்கு இணையாக வுள்ள கோடு மூடு தலத்தை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டும் பரப்புக்களுக்குக் கூறினோம். நான்கோ அல்லது மேற்பட்ட புள்ளிகளில் வெட்டினால் தேற்றத்தில் கூறியபடியுள்ள தலங் களாகப் பிரிக்க முடிந்தால் ஒவ்வொரு பகுதிக்கும் தேற்றம் பொருந்தும். ஆகவே, கூடுதலைக் கொள்ள முழுத்தலப் பரப்பிற் கும் பொருந்தும்.

குறிப்பு: (i) $\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV$ என்பதை $\int_V \nabla\, \mathbf{F}\; dV$ எனவும் குறிப்பது வழக்கம்.

(ii) $\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, dS$ என்பதை $\int_S \mathbf{F}\,.\,\mathbf{n}\; dS$ என்றோ அல்லது $\int_S \mathbf{F}\; d\mathbf{S}$ என்றோ குறிப்பதுவும் உண்டு. இங்கு $d\mathbf{S}$ என்பது பரப்பு வெக்டர் $\mathbf{n}\, dS$ ஐக் குறிக்கும்.

வாய்வுத் தேற்றத்தின் பௌதிக விளக்கம் (Physical explanation of Divergence Theorem)



படம் 24.

S எனும் மண்டலம், நீரியங்கும் மண்டலத்தில் ஒரு பகுதி யாகுக. $\mathbf{F}$ எனும் வெக்டர், இயங்கும் நீரின் திசை வேகம்

$\mathbf{V}$ஐக் குறிக்கட்டும். இது புள்ளிக்குப் புள்ளி மாறுபடும். 'ds' எனும் நுண்ணிய பரப்பு வழி Δt நேரத்தில் செல்லும் நீரின் கொள்ளளவு

$=V\Delta t$ எனும் சாய்வுயரத்தையும், dS எனும் அடிப் பக்கத்தையுமுடைய கனச் சாய் செவ்வகத்தின் கொள்ளளவு

$$=(\mathbf{V}\Delta t).n\, ds=\mathbf{V}.\mathbf{n}\, ds\, \Delta t$$

dS எனும் பரப்பு வழி அலகு நேரத்தில் பாயும் நீரின் கொள்ளளவு

$$=\frac{\mathbf{V}.\mathbf{n}\, dS\Delta t}{\Delta t}=\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, dS.$$

$\therefore$ S எனும் மொத்தப் பரப்பு வழி பாயும் நீரின் கொள்ளளவு

$$=\iint_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, dS.$$

ஆனல் dV எனும் நுண்ணிய கன சதுரம் வழிப் போகும் நீரளவு $\nabla\cdot\mathbf{V}\ dV$ எனக் கண்டுள்ளோம். (பக்கம் 113 காண்க) S எனும் பரப்பு முடிய கன மண்டலத்தில் பாயும் நீரளவு

$$=\iiint\nabla\cdot\mathbf{V}\ dV$$

$$\therefore\ \iiint_V \nabla\cdot V\ d\, V=\iint_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\ dS\cdot$$ $\mathbf{V}$ என்பதை $\mathbf{F}$ என மாற்றினல், $$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\ d\, V=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS.$$

கணக்கு: $\iint_S \mathbf{F}\cdot\ \mathrm{n}\ dS$ எனும் நுண் தொகையை

$\mathbf{F}=4xzi-y^2j+yz\mathbf{k}$ எனும்போது $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1$ எனும் கன சதுரப் பரப்பின் மீது காண்க.

தீர்வு: பாய்வுத் தேற்றத்தின்படி

$$\iiint\nabla\cdot\ \mathbf{F}\ dV=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathrm{n}\, dS$$

$$\nabla F = \frac{\partial}{\partial x}(4xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz)$$

$$= 4z - 2y + y$$

$\therefore \iint (4z - y)\, dV = 4V\mathbf{z} - V\mathbf{y}$ [x, y, z என்பது திணிவு மையம்].

$$\therefore \iiint \nabla . \mathbf{F}\, dV = V[4 \times \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}] = \tfrac{3}{2} \times 1 = \tfrac{3}{2}$$

[$V = 1$ என்பது தெளிவு]

[மேற் கணக்கில் அடுக்கு நுண் தொகையைப் படிப் படியாகக் காணுமல், கன சதுரத்தின் திணிவு மையத்தின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம்].

கணக்கு: $\mathbf{A} = 4x\,i - 2y^2\,j + z^2\,k$ எனும் வெக்டர் சார்பலனின் தல நுண் தொகையை $x^2 + y^2 = 4$; $y = 0$, $z = 3$ எனும் நேருருளையின் தலப்பரப்பின் மீது காண்க.

தீர்வு: பாய்வுத் தேற்றத்தின்படி

$$\iiint_S \mathbf{A}.n\, dS = \iiint_V \nabla . \mathbf{A}\, dV$$

$$\nabla . \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}(4x) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2)$$

$$= 4 - 4y + 2z$$

$$\therefore \iiint_V (4 - 4y + 2z)\, dV = 4V - 4V\mathbf{y} + 2V\mathbf{z}$$

$V = 4\pi \times 3 = 12\pi$; $\therefore 4V = 48\pi$

$\mathbf{y} = 0 \therefore 4V\mathbf{y} = 0$

$2V\mathbf{z} = 2 \times 12\pi \times \tfrac{3}{2} = 36\pi$

$\therefore \nabla V - 4V\mathbf{y} + 2V\mathbf{z} = \underline{\underline{84\pi}}$

கணக்கு: $\iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,ds = 3V$ எனக் காட்டுக.

V என்பது S எனும் மூடிய தலப் பரப்பு அடக்கிய கொள்ளளவு.

தீர்வு: $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

$$\therefore\ \nabla\cdot\mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$\therefore\ \iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{r}\,dV = \iiint 3\,dV = 3V$$

$\iint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV$ **என்பது போன்ற வேறு சில முற்றொருமைகள்.**

1. $\iint \varphi\,\mathbf{n}\,dS = \iiint_V \nabla\varphi\,dV$ எனக் காண்க. மேற்கூறிய பாய்வுத் தேற்றத்தில் $A = \varphi\,\mathbf{c}$ என இடுக. $\mathbf{c}$ நிலை வெக்டர் ஆகுக.

$$\therefore\ \iint_S \varphi\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot(\varphi\,\mathbf{c})\,dV$$

$$\therefore\ \iint_S \mathbf{c}\cdot(\varphi\mathbf{n})\,dS = \iiint (\nabla\varphi\cdot\mathbf{c})\,dV$$

$$= \iiint (\mathbf{c}\cdot\nabla\varphi)\,dV$$

$\mathbf{c}$ நிலை வெக்டராதலால்

$$\mathbf{c}\cdot\iint_S \varphi\,\mathbf{n}\,dS = \mathbf{c}\cdot\iiint_V \Delta\varphi\,dV$$

$\mathbf{c}$ என்பது ஏதேனும் ஒரு நிலை வெக்டராதலால்

$$\iint_S \varphi\,\mathbf{n}\,dS = \iiint_V \nabla\varphi\,dV$$

2. $\iiint_V \nabla \times \mathbf{B}\, dV = \iint_S \mathbf{n} \times \mathbf{B}\, dS$ எனக்காண்க.

$\iiint \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = \iint_S A \cdot \mathbf{n}\, dS$ எனும் பாய்வுத் தேற்றத்தில்

$\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{c}$ எனும்படி பிரதியிடுக. $\mathbf{c}$ என்பது ஏதேனும் ஒரு நிலை வெக்டர்.

$$\therefore \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{c})\, dV = \iint_S \mathbf{B} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{B} \times \mathbf{c} \cdot n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{c} \times n = \mathbf{c} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{B})$$

$$\therefore \iiint_V \mathbf{c} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})\, dV = \iint_S (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{B})\, dS$$

$$\therefore \mathbf{c} \cdot \iiint_V \nabla \times \mathbf{B}\, dV = \mathbf{c} \cdot \iint_S \mathbf{n} \times \mathbf{B}\, dS$$

$\mathbf{c}$ என்பது ஏதேனும் ஒரு நிலை வெக்டராதலால்

$$\iiint_V \Delta \times \mathbf{B}\, dV = \iint_S \mathbf{n} \times \mathbf{B}\, dS$$

கிரீன் முற்றொருமைகள் : (Green's identities)

(1) முதல் முற்றொருமை :

$$\iiint_V \varphi \nabla^2 \psi + (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \psi)\, dV$$

$$= \iint_S (\varphi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{s}$$

பாய்வுத் தேற்றத்தில் $\iiint_V \nabla \cdot A\, dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$

இதில் $\mathbf{A} = \varphi \nabla \psi$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore \iiint_A \nabla \cdot (\varphi \nabla \psi)\, dV = \iint_S (\varphi \nabla \psi) \cdot n\, dS$$

ஆனால் $\nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) = \varphi (\nabla \cdot \nabla \psi) + \nabla \varphi \nabla \psi$

$$= \varphi \Delta^2 \psi + \Delta \varphi \cdot \Delta \psi$$

$$\therefore \iiint [\varphi \nabla^2 \phi + (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \phi)]\, dV = \iint_S (\varphi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{s} \;\ldots\text{(i)}$$

இது கிரீனின் முதல் முற்றொருமை எனப்படும்.

(2) (i)-ஆவது சமன்பாடு போன்று.

$$\iiint [\phi \nabla^2 \varphi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \varphi)]\, dV = \iint_S (\phi \nabla \varphi) \cdot d\mathbf{s} \;\ldots\text{(ii)}$$

எனவும் காணலாம்.

(i) — (ii)

$$\iiint_V (\varphi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \varphi)\, dV = \iint_S (\varphi \nabla \phi - \phi \nabla \varphi) \cdot d\mathbf{s}$$

இது கிரீனின் இரண்டாவது முற்றொருமை எனப்படும்.

பாய்வுத் தேற்றம், ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம், இவற்றைக் கார்டீசியக் கூறுகளில் அமைத்தல் :

1. பாய்வுத் தேற்றம் :

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \cdot dS$$

$\mathbf{F} = F_1(x, y, z)\, i + F_2(x, y, z)\, \mathbf{j} + F_3(x, y, z)\, \mathbf{k}$ ஆகுக.

$$\therefore \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$\mathbf{n} = l\,\mathbf{i} + m\,\mathbf{j} + n\,\mathbf{k}$ ஆகுக.

இங்கு l, m, n என்பவை தளத்தின் செங்கோட்டின் திசைக் கோணங்கள்.

$$\therefore \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = l F_1 + m F_2 + n F_3$$

ஆகவே, பாய்வுத் தேற்றம் கீழ் வருமாறு அமைகிறது:

$$\iiint \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz =$$

$$\iint_S (F_1 l + F_2 m + F_3 n)\, dS.$$

ஆனால் $l\,dS = dy\,dz$; $m\,dS = dz\,dx$; $n\,dS = dx\,dy$. ஏனெனில், dS-ன் $x = 0$ எனும் தளத்தின் மீது வீழல் $= l\,dy\,dz$. இது போன்று மற்றவையும்.

$$\therefore \iint_S F_1\,dy\,dz + F_2\,dz\,dx + F_3\,dx\,dy)$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

எனவும் கூறலாம்.

2. ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம் : இதே போல ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம்.

$$\int_C (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz) = \iint_S \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) dy\,dz$$

$$+ \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) dz\,dx$$

$$+ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x}\right) dx\,dy$$

என ஆகும்.

கணக்கு :

S என்பது மூடிய தலப் பரப்பு; $\mathbf{r}$ என்பது $P(x, y, z)$ எனும் புள்ளியின் நிலை வெக்டர். 0 என்பது ஆதி என்றால், S-க்கு வெளியே 0 இருந்தால் (*a*) $\iint_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dS = 0$ எனவும்,

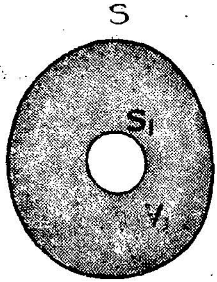
உள்ளே இருந்தால் (*b*) $\iint_S \frac{\mathbf{n}\,\mathbf{r}}{r^3}\,ds = 4\pi$ எனவும் நிறுவுக.

(*a*) பாய்வுத் தேற்றத்தால் $\iint_S \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,ds = \iiint \frac{\nabla\cdot\mathbf{r}}{r^3}\,dV$

ஆனால் $\frac{\nabla\cdot\mathbf{r}}{r^3} = (\nabla\,\mathbf{r}^{-3})\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}^{-3}\,\nabla\cdot\mathbf{r}$

$$= -\frac{3}{r^6}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} + r^3 . 3$$

$$= -3r^3 + 3r^{-3} = 0$$



படம் 25.

(*b*) ஆதி 0 உள்ளே இருந்தால் $\mathbf{r}=0$ எனும்போது $\frac{\mathbf{r}}{r^3}$-ன் மதிப்பு வரையறுக் கப்படவில்லை. ஆகவே, ஆதியை மைய மாகக் கொண்டு ஒரு சிறு கோள வளை தலப் பரப்பைக் கொள்ளவும். அதை S_1 என்போம். அப்போது

$$\iint_{S+S_1} \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3} dS = \iint_{S} \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3} dS + \iint_{S_1} \mathbf{n}\,.\,r\,dS = \iint_{V_1} \frac{\nabla\cdot\mathbf{r}}{r^3} dV = 0$$

$$\therefore \iint_{S} \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3} dS = -\iint_{S_1} \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3} dS$$ ஆனல் S_1 எனும்

கோளத் தலத்தில் $r = a$ (கோள ஆரம்) $\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{r}}{a}$

$$\therefore \frac{\mathbf{n}\cdot r}{\mathbf{r}^3} = \frac{\left[-\frac{\mathbf{r}}{a}\right]\cdot\mathbf{r}}{a^3} = -\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}{a^4} = -\frac{a^2}{a^4} = -\frac{1}{a^2}$$

$$\therefore -\iint_{S_1} \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{r^3} dS = \iint_{S_1} \frac{dS}{a^2} = \frac{4\pi a^2}{a^2} = 4\pi$$

கணக்கு: ஒரு நீரியல் பொருளின் செறிவு $\rho\,(x, y, z, t)$ ஆகும். அது $\mathbf{V}\,(x, y, z, t)$ எனும் திசை வேகத்துடன் இயங்கு கிறது. இயங்கும் வழியில் நீரூற்றுகளும் (Source), வடிகால் களும் (Sinks) இல்லை எனின், $\Delta.\rho\,\mathbf{V} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ எனக் காட்டு.

தீர்வு: 'V' எனும் கொள்ளளவில் உள்ள இயங்கும் நீரியல் பொருளைக் கவனிப்போம்.

அதில் உள்ள பொருளின் திணிவு (அல்லது பொருண்மை),

$$M = \iiint_V \rho \, dV$$

't' நேரத்தில் இது மாறு வீதம்

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

V எனும் கொள்ளளவை விட்டு அலகு நேரத்தில் பாயும் நீரியல் பொருள் $\iint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS$

$$\therefore \; -\iint_S \rho \, \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS = -\iiint_V \Delta \, (\rho \cdot \mathbf{v}) dV$$

(பாய்வுத் தேற்றத்தின்படி)

$$\therefore \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = -\iiint_V \Delta \cdot (\rho \mathbf{V}) \, dV$$

$$\therefore \; \iiint_V (\nabla \cdot \rho \, \mathbf{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = 0$$

ஆனல் கொள்ளளவு V என்பது ஏதேனுமாகலாம். ஆதலால்

$$\underline{\underline{\Delta \cdot (\rho \, \mathbf{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}}$$

குறிப்பு: 'ρ' நிலையானல், $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0.$ அதாவது $\mathbf{V}$ பாய்விலா வெக்டராகும்.

ஸ்டோக்ஸ், பாய்வுத் தேற்றக் கணக்குகள்

கணக்கு :

$(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)$ எனும் முனைகளையுடைய சதுரத்தின் பக்கங்களின் மேல் $\int xy \, dx + xy^2 \, dy$ எனும் நுண் தொகை காண்க.

$$\text{நுண்தொகை} = \int_C xy\,dx + xy^2 dy$$

$$= \int_C (xy\,\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}).d\mathbf{r}$$

$$= \int_S \Delta \times (xy\,i + xy^2\mathbf{j}).nd\mathbf{s}$$

$$\nabla \times (xy\,i + x^2\mathbf{j}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) - \frac{\partial}{\partial x}(xy)\right).\mathbf{k}$$

$$= (y^2 - x)\,\mathbf{k}$$

$$\therefore \quad \text{நுண் தொகை} = \int_S (y^2 - x)\,dx\,dy$$

$$= \int_S y^2 dx\,dy - \int_S x\,dx\,dy$$

சதுரத்தின் திணிவு மையம் $\mathbf{x} = 0$

$$\therefore \quad \int_S x\,dx\,dy = 0$$

$\int y^2 dx\,dy = y$ அச்சைச் சுற்றிய நிலைம நெம்புதிறன்

$$= M\frac{a^2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \quad \text{நுண் தொகை} = \frac{4}{3}$$

[இங்கு இது கிரீன் தேற்றக் கணக்கே என்பதைக் கவனிக்கவும்].

கணக்கு 2:

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ எனும் கோளத்தில் xy தளத்திற்கு மேல் உள்ள அரைப் பகுதியைத் தலமாகவும், அதன் அடி வட்டத்தைத் தலத்தின் பரிதியாகவும் கொண்டு,

$$\mathbf{A} = (2x - y)\,i - y\,z^2\mathbf{j} - y^2 z\mathbf{k}$$

எனும் வெக்டரைப் பயன் படுத்தி ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம் சரி காணவும்.

தீர்வு : $\oint_C \mathbf{A}.dr = \iint \nabla \times \mathbf{A}.\mathbf{n}\, ds$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (2x-y) & -yz^2 & -y^2z \end{vmatrix}$$

$$= [(-2yz)+2yz]\, i + 0\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$= \mathbf{k}$$

$$\therefore \quad \mathbf{k}.\mathbf{n}\, dS = dx\, dy$$

வலப் பக்கம்:

$\therefore \iint_S dx\, dy =$ தலப் பரப்பின் வீழலின் பரப்பு

= வட்டப் பரப்பு

$= \pi$

இடப் பக்கம்:

$x = \cos t \quad y = \sin t \quad z = 0$ எனப் பிரதியிட,

$$\oint_C \mathbf{A}.d\mathbf{r} = \oint_0^{2\pi} (2x-y)\, dx \; - yz^2\, dy \; - y^2 z\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cos t - \sin t)(-\sin t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = 4.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \pi$$

கணக்கு :

$\int_S \Delta \times \mathbf{F} \cdot ds$ எனும் நுண் தொகையில்

$\mathbf{F} = (y^2+z^2-x^2)\, i + (z^2+x^2-y^2)\mathbf{j} + (x^2+y^2-z^2)\, \mathbf{k}$. S எனும் தலம், $x^2+y^2-2ax+az=0$ என்பதில் $z>0$ என உள்ள தலம் என்றால் நுண் தொகையைக் காண்க.

தலத்தின் சமன்பாடு $a(z-a) = -[(x-a)^2+y^2]$ ஆகும்.

$\therefore\ z<a$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

ஆகவே, xy தளத்திற்குமேல் $z=a$ வரை உள்ள தலப் பரப்பில் நுண் தொகை காண வேண்டும்.

இதன் பரிதி காண $z=0$ இடவும்.

பரிதிச் சமன்பாடு $z=0;\ (x-a)^2+y^2=a^2$

எனும் விட்டம் $x=a(1+\cos\theta)$

$$y=a\sin\theta$$

என்பது சமன்பாடு.

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F}.d\mathbf{s} = \int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

$$= \int_C (y^2+z^2-x^2)\,dx + (z^2+x^2-y^2)\,dy + (x^2+y^2-z^2)\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} [a^2\sin^2\theta - a^2(1+\cos\theta)^2](-a\sin\theta)\,d\theta$$

$$+ [a^2(1+\cos\theta)^2 - a^2\sin^2\theta]\, a\cos\theta\, d\theta$$

இவற்றுள் $\int_0^{2\pi} a^3\, 2\cos^2\theta\, d\theta$ என்பதைத் தவிர மற்றவை

பூச்சியம்.

$\therefore$ நுண் தொகை $= \underline{\underline{2a^3.\pi.}}$ $\underline{\underline{=2\pi a^3}}$

கணக்கு:

$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ எனும் நுண் தொகையில்

$\mathbf{F} = \{ (x^3 - yz)\, i - 2x^2 y\, j + 2\,\mathbf{k} \} \cdot \mathbf{n}\, dS$

S எனும் தலப் பரப்பு $x = 0, \; y = 0, \; z = 0$

$x = a, \; y = a, \; z = a$ எனும்

5 பக்கங்கள் என்றால் நுண் தொகையின் மதிப்புக் காணவும்.

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_r \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - yz) + \frac{\partial}{\partial y}(-2x^2 y) + \frac{\partial}{\partial z}$$

$$= 3x^2 - 2x^2 = x^2$$

$$\therefore \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_V x^2\, dV$$

கன சதுரத்தின் $y\,z$ தலத்தையொட்டிய நிலைம நெம்பு திறன்

$$= \int_0^a dz \int_0^a dy \int_0^a x^2\, dx$$

$$= \int_0^a \int_0^a \frac{a^3}{3}\, dy$$

$$= \frac{a^5}{3}$$

பயிற்சி

$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$-ன் மதிப்புக் காண்க.

1. $\mathbf{F} = 2xy\, i + yz^2\, j + xz\, \mathbf{k}$. S எனும் தலம் $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$ எனும் தலங்களில் உள்ள பரப்பு. [விடை 30]

2. மேற் சொன்ன **F** எனும் வெக்டர். S எனும் தலம். $x = 0,\ y = 0;\ y = 3,\ z = 0,\ x + 2z = 6$ $\left[\text{விடை } \frac{351}{2}\right]$

3. பாய்வுத் தேற்றத்தைச் சரி காணவும். **A** எனும் வெக்டர் $= 2x^2 y\, i - y^2 j + 4xz^2 \mathbf{k}$. தலப் பரப்பு $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $y^2 + z^2 = a$; $x = 2$ [விடை 180]

4. $\mathbf{A} = ax\,i + by\,j + cz\,\mathbf{k}$ என்றால்

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = (a + b + c)\ V$$ எனக் காண்க. S எனும் மூடிய தலப் பரப்பு அடக்கிய கொள்ளளவு V ஆகும்.

5. $\mathbf{H} = \nabla \times A$ என்றால் S என்பது மூடிய தலமானால், $\iint_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$ எனக் காண்க.

6. $\iiint \frac{dV}{r^2} = \iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3}\, dS$ எனக் காண்க.

7. S என்பது மூடிய தலமானால், $\iint_S \mathbf{n}\, dS = 0$ எனக் காண்க.

8. $\mathbf{A} = (y - z + 2)\,i + (yz + 4)\,j - xz\,\mathbf{k}$; S எனும் தலம் $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$ என்றால் ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம் சரிகாண்க. [-4]

9. $\mathbf{F} = xz\,i - y\,j + x^2 y\,\mathbf{k}$. S எனும் தலம் $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $2x + y + 2z = 8$ (xz தளத்தில் இல்லாதது) என்றால் ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம் சரிகாண்க. $\left(\frac{32}{3}\right)$

10. $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A})\, n\, dS$-ன் மதிப்பு காண்க.

$\mathbf{A} = (x^2 + y - 4)\,i + 3xy\,\mathbf{j} + (2xz + z^2)\,\mathbf{k}$ S எனும் தலம் (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ $Z > 0$ எனும் அரைக் கோளம் (b) $z = 4 - (x^2 + y^2)$ $z > 0$ எனும் பாகம்.

[(a) $- 16\pi$; (b) $- 4\pi$]

பிற்கோப்பு

(Appendix)

சுழலுக்கு மற்ெருரு வரையறை (Another definition for curl)

ΔS என்பது C எனும் சாதாரண மூடிய வரையில் சூழப்பட்ட தலப் பரப்பாகுக. 'P' அந்தப் பரப்பில் C-ல் அமையாத புள்ளியாகுக. ΔS-க்கு அலகுச் செங்கோடு $\mathbf{n}$ ஆகுக.

$$\text{என்ருல்,}\ \Delta \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \underset{\Delta s \to 0}{Lt} \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\,\mathbf{r}}{\Delta s}\ \text{ஆகும்.}$$

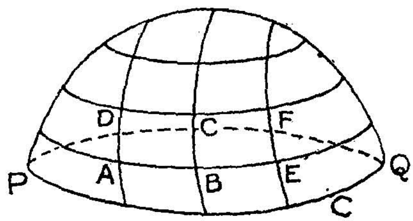
$\mathbf{A}$ எனும் வெக்டரின் சுழல் மேற்குறித்தவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

ΔS எனும் பரப்புச் சுருங்கி P எனும் புள்ளியை அடையும் போது வரும் வரை நுண் தொகைக்கும் ΔS-க்கும் உள்ள விகித எல்லை $\mathbf{A}$ எனும் புள்ளி வெக்டர் சார்பலனின், P-ல் உள்ள சுழல் எனப்படும்.

இவ்வாறு $x_1\ y_1\ z_1$ அச்சுகளைச் சாராமல், தலப் பரப்பையே சார்ந்து $\mathbf{A}$ எனும் வெக்டரின் சுழல் வரையறுக்கப்படுகிறது. எந்த அச்சுத் தொகுதியை வேண்டுமாயினும் நாம் கொள்ளலாம் எனவும் இதனுல் அறிகிரேும்.

ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம்: (நிரூபணம்)

PCQ என்பது S எனும் தலத்தின் பரிதியாகுக; தலத்தைப் பலவேறு சிறு பரப்புகளாகப் பிரிக்கவும். $ABCD$: $BEFC$



படம் 26.

என்பவை அவற்றுள் இரு சிறு பிரிவுகளாகுக. அவற்றின் பரிதிகளை C_1 C_2 எனக் குறிப்போம். $\mathbf{F}$ என்பது ஒரு வெக்டர் புள்ளிச் சார்பலன் ஆகுக.

$$\therefore \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{F} \, \Delta S_1 + t_1 \, \Delta S_1$$ [S_1 என்பது $ABCD$-ன் பரப்பு]

இதுபோன்று $$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{F} \, \Delta S_2 + t_2 \, \Delta S_2.$$

இங்கு $\Delta S \to 0$ ஆகும்போது $t \to 0$ ஆகும். இவ்வாறு மற்ற தலங்களுக்கும் எழுதிக் கூட்டவும். C_1 எனும் வரை நுண் தொகைக்கு BC வழி எடுக்கும் நுண் தொகை, C_2 எனும் வரை நுண் தொகைக்கு CB வழி எடுக்கும் தொகையொடு சேர்க்கப் பூச்சியமாகிறது. $ABCDA$; $BEFCB$ எனும் வரை நுண் தொகையில் $AEFDA$ எனும்படி ஆகிறது. இவ்வாறு எல்லாவற்றையும் கூட்ட

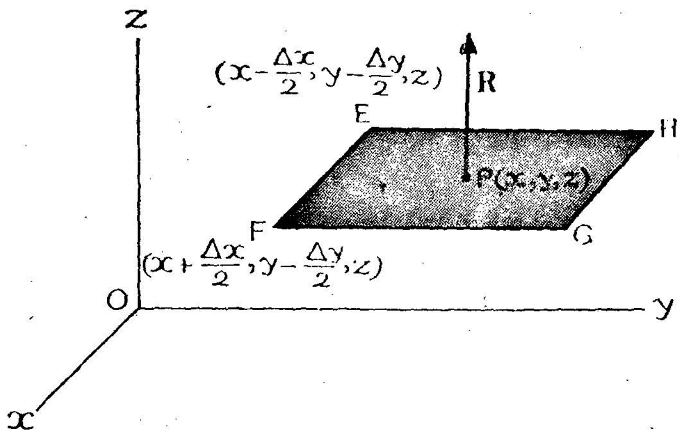
வரை நுண் தொகை $\int_{PCQ} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ஆகும்.

தல நுண் தொகை பரப்பு முழுவதிலும் ஆகும்.

$$\therefore \oint_{CQ} F \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{F} \, dS$$ ஆகும்.

சுழலின் கார்டீசிய உருவம் (Cartesian representation of curl)

x, y தளத்திற்கு இணையாக $P(x, y, z)$. ஒரு செவ்வகம் *EFGH* கொள்க. P அதன் மையம் ஆகுக.



படம் 27.

A என்பது ஒரு புள்ளி வெக்டர் சார் பலன் ஆகுக. *EFGH* எனும் பரிதியை C என்போம்.

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{EF} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_{FG} \mathbf{A}\, d\mathbf{r} + \int_{GH} \mathbf{A}\, d\mathbf{r} + \int_{HE} \mathbf{A}\, d\mathbf{r}$$

A-ன் x, y பிரிவுகள் முறை $A_1\ A_2$ ஆகுக.

ஆனல் $$\int_{EF} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \left(A_1 - \tfrac{1}{2}\frac{\partial A_1}{\partial y}\nabla y\right)\nabla x;$$

$$\int_{GH} \mathbf{A}\, d\mathbf{r} = -\left(A_1 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial A_1}{\partial y}\nabla y\right)\nabla x;$$

$$\int_{FG} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \left(A_2 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial A_2}{\partial x}\nabla x\right)\nabla y;$$

$$\int_{HE} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = -\left(A_2 - \tfrac{1}{2}\frac{\partial A_2}{\partial y}\nabla x\right)\nabla y$$

[முதல்படி சிறு நுண் அளவிற்கு (First order of small magnitudes)]

$$\therefore \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \left[\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right] \Delta x \, \Delta y$$

ஆனால் செவ்வகப் பரப்பு = $\Delta x \, \Delta y$

$$\therefore \frac{\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}}{\Delta x \, \Delta y} = \left[\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right]$$

இது சுழலின் 'Z' பிரிவாகும்.

இது போன்று x பிரிவு $\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} = \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)$;

y பிரிவு $\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)$

$$\therefore \nabla \times A = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

என முன் கூறிய சுழலின் விளக்கம் வருகிறது.

பாய்வின் மற்றொரு வரையறை : அச்சுகளைச் சாராத வரையறை, சுழலுக்குக் கூறியது போன்று பாய்வின் வரையறையும், அச்சுகளைச் சாராது கூறலாம்.

வரையறை : S என்பது 'V' எனும் கொள்ளளவை மூடிய தலப் பரப்பாகுக. கொள்ளளவை ΔV_1 ΔV_2 எனும் சிறு கொள்ளளவாகப் பிரிக்கவும். அவற்றை மூடிய தலப் பரப்புகள் S_1 S_2 ஆகுக. என்றால், **A** எனும் வெக்டர் புள்ளிச் சார்

பலனின், P எனும் புள்ளியில் பாய்வு

$$\text{அதாவது } \Delta \cdot \mathbf{A} = \underset{\Delta V_k \to 0}{Lt} \frac{\int_{Sk} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta V_k} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \mathbf{i}$$

$$+ \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \mathbf{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

என முன் கூறிய சுழலின் விளக்கம் வருகிறது.

பாய்வின் மற்ருெரு வரையறை :

எவ்வாறு வெக்டர் சார் பலனின் சுழலுக்கு அச்சுகளைச் சாராத வரையறை கூறினோமோ, அதே போன்று பாய்வுக்கும் கூறலாம்.

வரையறை : $\mathbf{A}$ என்பது ஒரு வெக்டர் புள்ளிச் சார் பலன் ஆகுக. P எனும் புள்ளியை மூடிய தலம் S ஆகுக. கொள்ளளவு ΔV ஆகுக. அப்போது

$$\mathbf{A}\text{-ன் பாய்வு} = \Delta \cdot \mathbf{A} = \underset{\Delta V \to 0}{Lt} \frac{\int_{S} \mathbf{A}\, d\mathbf{s}}{\Delta V}$$

பாய்வுத் தேற்றம்

S எனும் ஒழுங்கான மூடிய தலம் அடைக்கும் கொள்ளளவு V ஆகுக. அதை ΔV_1, $\Delta V_2 \ldots \Delta V_k \ldots$ எனும்படி நுண்ணிய கொள்ளளவாகப் பிரிக்கவும். அவற்றை மூடிய தலப் பரப்புகள் $S_1, S_2, \ldots S_k$ ஆகுக.

S_k எனும் தலப் பரப்புக்குள் உள்ள புள்ளியில்

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\int_{S_k}\mathbf{A}\,ds}{\Delta V_k} + t\,\mathbf{k}$$

$$\therefore \int_{S_k} \mathbf{A}.d\mathbf{s} = (\nabla\cdot\mathbf{A})\,\Delta V_k - t_k\,\Delta V_k$$

$$\therefore \int_{\mathbf{S}} \mathbf{A}.d\,\mathbf{s} = \sum(\nabla\cdot\mathbf{A})\,\Delta V_k - \sum t_k\,\Delta V\mathbf{k}$$

$S_1\,S_2$-என்பவை பூச்சியத்தை அணுகும்போது,

$$\int_S \mathbf{A}\,.\,d\,\mathbf{s} = \int_V (\nabla\cdot\mathbf{A})\,d\mathbf{V}$$

$$\therefore \int_S \mathbf{A}.d\,\mathbf{s} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,d\mathbf{V}$$

என வருகிறது.

மேற்கூறிய பாய்வின் வரையறையிலிருந்து. புள்ளியின் கார்டீசியக் கூறுகள் (x, y, z) என்றால்

$\nabla\cdot\mathbf{A}\,\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$ எனக் காட்ட முடியும். இங்கு

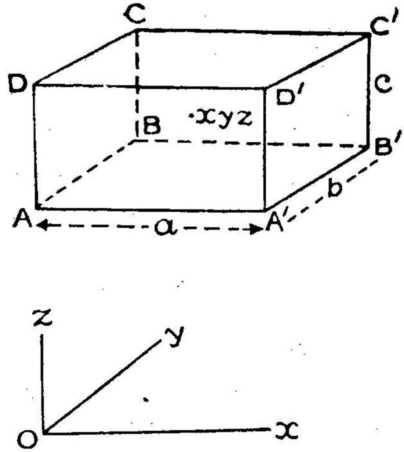
A_1, A_2, A_3 என்பவை வெக்டர் $\mathbf{A}$-ன் அச்சு திசைப் பிரிவுகளாகும்.

நிருபணம்:

$P\,(x, y, z)$ என்பது புள்ளியாகுக. அதை மையமாகவுடைய கனச் செவ்வகம் a, b, c நீளங்களுள்ள பக்கமுடையுனவாய்க் கொள்ளலாம்.

இதன் கொள்ளளவு $a\,b\,c$.

A எனும் வெக்டர் x பிரிவு, A_1, y பிரிவு A_2, z பிரிவு A_3.



படம் ௨8.

$\therefore \int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}$ எனும் தல நுண் தொகையை $A'\,B'\,C'\,D'$ எனும் பரப்பில் கொள்வோம்.

அதன் மதிப்பு $= -b\,c\,A_1(x+\frac{a}{2}, y, z)$

அதன் எதிர்ப்புறம் அதன் மதிப்பு $= -\,b\,c\,A_1\,(x-\frac{a}{2}, y, z)$

இரண்டின் கூடுதல் $= -\,b\,c\,[A_1\,(x+\frac{a}{2}, y, z) - A_1(x-\frac{a}{2}, y, z)]$

$$\therefore \frac{\int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}}{\Delta V} = \frac{-\,b\,c\,[A_1\,(x+\frac{a}{2}, y, z) - A_1(x-\frac{a}{2}, y, z)]}{a\,b\,c}$$

$+$ இது போன்ற இரண்டு உறுப்புகள்.

(மற்றிரு எதிர்ப் பக்கங்களையும் கொள்ள)

$$\Delta\cdot A = \int_{\Delta V\to 0} \frac{A\cdot ds}{\Delta V} = Lt._{a\to 0}\ \frac{A_1\left(x+\frac{a}{2}, y, z\right) - A_1\left(x-\frac{a}{2}, y, z\right)}{a}$$

+ இது போன்ற இரண்டு உறுப்புகளுக்கும்

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

கணக்கு:

$\mathbf{a} = x^3\, i + y^3\, j + z^3\, k$; அத்துடன் S என்பது 'R' ஆரமுடைய ஒரு கோளம் என்ருல், $\int_S \mathbf{a}\cdot d\mathbf{s} = \frac{12}{5}\pi R^5$ எனக் காண்க.

தீர்வு: $\int_S \mathbf{a}\cdot d\mathbf{s} = \int_V (\nabla\cdot\mathbf{a})\, dV$

$$\nabla\cdot\mathbf{a} = \nabla\cdot(x^3\, i + y^3\, j + z^3\, \mathbf{k})$$

$$= 3\,(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\therefore \int_S \nabla\cdot\mathbf{a}\, dV = \int_V 3\,(x^2 + y^2 + z^2)\, dV$$

$\int_V (x^2+y^2+z^2)\, dV$ என்பது ஒரு கோளத்தின் மையத்தைச் சார்ந்த நிலைம நெம்பு திறன். 'A' என்பது விட்டத்தைச் சார்ந்த நெம்பு திறனுனல், மையத்தைச் சார்ந்த நெம்பு திறன்

$$I = \frac{3A}{2}$$

$$\left\{\frac{A+B+C}{2} = I \text{ ஆனல், } A = B = C\right\}$$

$$A = \frac{2}{5} R^2 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$= \frac{8}{15} \pi R^5$$

$$\therefore \quad \text{நுண் தொகை} = 3 \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{5}{\cancel{15}}} \pi R^5$$

$$= \frac{12}{5} \pi R^5$$

BIBLIOGRAPHY

Vector Analysis : — L. Brand, John Wiley & Sons, London.

Vector Analysis : — Schaum Series; Murray R. Spiegel

Vector Analysis : — Schwart, Green and W. A. Rutledge: Harper & Row. N. Y.

Vector Methods : — D. E. Ruther ford; Oliver & Boyd.

கலைச்சொற்கள்

Binormal	—	முக்கிய செங்கோடு
Closed curve	—	மூடிய வரை
Closed surface	—	மூடிய தலம்
Conservative field	—	காப்பு மண்டலம்
Conservative force field	—	ஆற்றல் காப்பு விசை மண்டலம்
Continuous	—	தொடர்ச்சி
Curl	—	சுழல்
Curl **A** or $\nabla \times$ **A**	—	சுழல் **A** அல்லது $\Delta \times$ **A**
Differentiable	—	வகைக்கெழுவுடைய
Directional derivative	—	திசைவகைக்கெழு
Divergence	—	பாய்வு
Dyads	—	இரட்டை வெக்டர்
Dyadics	—	இரட்டை வெக்டர் கோவை
Gradient	—	சரிவு
Grad ϕ or $\nabla \phi$	—	சரிவு ϕ அல்லது $\nabla \phi$
Invariant	—	மாறுக்கணியம்
Irrotational	—	சுழலில்லா
Level Surface	—	சம மதிப்புத் தலங்கள்
Line integral	—	வரை நுண்தொகை
Ordinary point	—	சாதாரணப் புள்ளி
Parameter	—	துணை அளவி

Point function	—	புள்ளிச் சார்பலன்
Region	—	மண்டலம்
Regular curve	—	ஒழுங்கு வரை
Regular surface	—	ஒழுங்குத்தலம்
Scalar potential	—	நிலைப்பண்பு
Sink	—	உறிஞ்சி அல்லது வடிகால்
Solenoidal Vector	—	பாய்விலா வெக்டர்
Source	—	ஊற்று
Surface integral	—	தல நுண்தொகை
Tangent Vector	—	தொடுகோட்டு வெக்டர்
Torsion	—	முறுகு